Série 8

Exercice 1

Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : Une transformation matricielle définie par une matrice A est toujours bijective lorsque son domaine (ensemble de départ) est égal à Lign$A$ et son codomaine (ensemble d'arrivé) est égal à Col$A$.

Exercice 2

Calculer, en faisant le moins de calculs possible, les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication : Utiliser le résultat de l'exercice 4.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3a \\ 0 & 3 & 3 & 2a \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Exercice 4

Pour quelles valeurs de c_1, c_2, c_3 la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$$

Indication : Montrer que $\det A = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)$.

Exercice 5

Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soient A et B des matrices de taille $n \times n$. Montrer que si A ou B est non inversible, alors AB est non inversible.

Exercice 7

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A, alors $\det B = \det A$.

b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det A = 0$.

c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A.

d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.

Exercices optionnels

Exercice 9

Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices telles que B est inversible et :

$$\begin{cases} det(A) & = & det(B^3) \\ det(C) & = & det(B^{-1}) \\ det(ABC) & = & 8 \end{cases}$$

Que valent $det(A), det(B)$ et $det(C)$?

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Si deux lignes d'une matrice de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det A = 0$.

(b) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.

(c) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det A = 2$ et $\det B = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.

(d) Si A est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors A est inversible.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.

b) $\det A^T = -\det A$ pour toute matrice carrée A.

c) Dans certains cas, il se peut que l'inverse d'une matrice A existe même si $\det A = 0$.

d) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}^*$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$.

Partiellement en classe

Exercice 12

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

Exercice 13

a) Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Même question pour A^T, B^T, C^T, D^T, E^T.

Exercice 14

Soit A une matrice $n\times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Exercice 15

Soit A une matrice $n\times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Exercice 16

Soit A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors le nombre

$$\det(A^{-1})\det(A+B)\det(B^{-1})$$

A est égal à 2.

B est égal à $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$,

C n'est pas défini car la matrice $A + B$ n'est pas forcément inversible.

D est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$.

(Une seule réponse correcte.)

Exercice 17

Soit A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors le nombre

$$\frac{\det(A^T) + \det(B^T)}{\det(A)\det(B)}$$

A est égal à $\det(A^T - A) + \det(B^T - B)$

B est égal à $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$

C est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$

D est égal à $\frac{1}{\det(B)} - \frac{1}{\det(A)}$

Exercice 18

Le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

est

A. -2

B. $2 - \alpha$

C. $-2 - \alpha$

D. 2

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.