Série 7 (Corrigé)

Exercice 1

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Solution : *Comme vu au cours, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application lineaire, alors il existe une unique matrice A de taille $m \times n$ telle que*

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \textit{pour tout } \mathbf{x} \textit{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Plus précisément, la j^e colonne de A est le vecteur $T(\mathbf{e}_j)$, où $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ est la base canonique.

a) $A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 2

a) Soit A une matrice 5×6. Si $\dim \operatorname{Ker} A = 3$, quel est le rang de A ?

Solution : *On considère l'application linéaire associée de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^5$. Le théorème du rang donne*

$$\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = 6 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3.$$

b) Soit A une matrice 7×3. Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\operatorname{Ker} A$? Même question si A est une matrice 3×7.

Solution :

Si A est de taille 7×3, alors $\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = 3$. Le rang maximum est 3 et la dimension minimum du noyau est 0.

Si A est de taille 3×7 , le rang maximum est 3. Comme $\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = 7$, la dimension minimum du noyau est 4.

c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\operatorname{rg}(A)$ pour que A^T soit inversible.

Solution : *A^T est inversible $\Leftrightarrow$ A est inversible $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}(A) = n$.*

d) Soit $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T} = \mathbf{I}_3$ (application identité). Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} \mathbf{T}$?

Solution : *On a*

$$3 = \operatorname{rg}(\mathbf{I}_3) = \operatorname{rg}(\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}).$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$. *Comme*

$$\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}),$$

on obtient $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{T} = 0$.

Exercice 3

Soit $B = \{1 - 3t^2,\ 2 + t - 5t^2,\ 1 + 2t\}$.

a) Vérifier que B est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Solution : *Écrivons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B dans la base canonique de $\mathbb{P}_2$, $\{1,\ t,\ t^2\}$:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice de déterminant 1 est inversible. Les trois vecteurs de B sont donc linéairement indépendants, et la dimension de $\mathbb{P}_2$ est 3. Par conséquent, B est une base de $\mathbb{P}_2$. La matrice P est en fait la matrice de passage de la base B vers la base canonique.

b) Déterminer la matrice de passage de la base B vers la base canonique $\{1, t, t^2\}$.

Solution : *La matrice P du a).*

c) Écrire t^2 comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

Solution : *Les coordonnées de* t^2 *dans la base canonique sont* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Par définition de la matrice de passage* P *du b), les coordonnées de* t^2 *dans la base* B *sont donc la solution du système*

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout : $x = 3, y = -2, z = 1$.

Exercice 4

Montrer que la dimension de $\mathbb{P}$ (espace des polynômes à coefficients réels) est infinie.
Solution : *Méthode 1 : L'espace* $\mathbb{P}$ *contient le sous-espace* $\mathbb{P}_n$ *de dimension* n *pour tout* n. *Par conséquent, la dimension de* $\mathbb{P}$ *est plus grande ou égale à* n *pour tout* n *donc infinie.*

Méthode 2 : Supposons par l'absurde que la dimension de $\mathbb{P}$ *soit finie, égale à* n. *Il existe une base* $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$. *Soit* $M = \max_{i=1,\cdots,n} deg(p_i)$ *le maximum des degrés des polynômes de cette base. On constate que le polynôme* t^{M+1} *n'est pas une combinaison linéaire des* $p_1, \cdots, p_n$, *ainsi* $t^{M+1} \notin \mathbb{P}$ *d'où la contradiction.*

Exercice 5

Soit $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\mathbf{T}$ soit bijective est $n = m$.
Solution :

Supposons $\mathbf{T}$ *bijective. Considérons* A *la matrice canonique associée à* $\mathbf{T}$. *Comme* $\mathbf{T}$ *est surjective (l'image de* $\mathbf{T}$ *recouvre tout* $\mathbb{R}^m$*), l'équation* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *possède une solution pour tout* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, *et les colonnes de* A *engendrent* $\mathbb{R}^m$, *ainsi on a* $n \geq m$. *Comme* $\mathbf{T}$ *est injective, l'équation* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *possède uniquement la solution triviale, ce qui signifie que les colonnes de* A *sont linéairement indépendantes. Ceci implique* $n \leq m$. *On a donc* $n = m$.

Exercice 6

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$

c) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Solution :

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *, injective (les colonnes sont linéairement indépendantes). Non surjective, car seulement deux vecteurs ne peuvent engendrer* $\mathbb{R}^3$*. Donc non bijective.*

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *, surjective (l'image est* $\mathbb{R}$*), non injective (plus de colonnes que de lignes). Donc non bijective.*

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *, injective, surjective et bijective (en permutant les lignes 1 et 3, on trouve la matrice identité).*

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *, rien (non injective car* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *est envoyé sur zéro, et non surjective, car les vecteurs de l'image satisfont* $x_1 = x_2$*).*

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *, injective, surjective et bijective.*

f) $\mathbf{T}$ *n'est pas une transformation linéaire, il est impossible de la représenter canoniquement par une matrice.*

Partiellement en classe mardi

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.

(b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.

(c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

Solution : *Vrai : (a), (c). Faux : (b), (d).*

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si une matrice A est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^n$.

b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle.

c) La transformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$.

d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.

Solution : *Vrai : d). Faux : a), b), c).*

Solution détaillée pour b) : *Rappel de définitions :*

i) *Soient $m, n \geq 1$ entiers. Une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est appelée* transformation matricielle *s'il existe une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telle que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

ii) *Soient V, W deux espaces vectoriels réels. Une transformation $T : V \to W$ est appelée* transformation linéaire *si T satisfait*

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(\lambda u) = \lambda T(u), \qquad \textit{pour tous } u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les relations entre transformations matricielles et transformations linéaires sont résumées ci-dessous :

- *Chaque transformation matricielle est une transformation linéaire.*
- *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire, alors il existe une unique matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telle que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En effet, la transformation linéaire T est une transformation matricielle.*

- *Soit $T : V \to W$ une transformation linéaire, où V, W sont des espaces vectoriels réels de dimension finie. En choisissant des bases de V et W et en introduisant les systèmes de coordonnées par rapport à ces deux bases, la transformation T dans ces systèmes de coordonnées peut être représentée par une matrice.*

- *Soit $T : V \to W$ une transformation linéaire, où l'un des espaces vectoriels V, W est de dimension infinie. Dans ce cas, il n'existe pas de représentation matricielle de la transformation linéaire T.*

Ce dernier point est illustré par l'exemple suivant : soit $C([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Définissons la transformation

$$T : C([0,1]) \to \mathbb{R} \quad \textit{telle que} \quad T(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Nous observons que

- *l'ensemble $C([0,1])$ forme un espace vectoriel réel de dimension infinie. L'ensemble des polynômes, de base $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$, est un sous-espace vectoriel et sa dimension n'est pas finie ;*

- *la transformation T est linéaire.*

Exercice 9

Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces, $\mathbf{T}_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \underset{\mathbf{T}_{\cdots}}{\rightarrow} \mathbb{R}^{\cdots} \underset{\mathbf{T}_{\cdots}}{\rightarrow} \mathbb{R}^{\cdots}$.

(a) AB, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{AB} : \mathbb{R}^3 \underset{\mathbf{T}_B}{\rightarrow} \mathbb{R}^2 \underset{\mathbf{T}_A}{\rightarrow} \mathbb{R}^3$.

(b) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution : $ABC = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{ABC} : \mathbb{R}^2 \underset{\mathbf{T}_C}{\rightarrow} \mathbb{R}^3 \underset{\mathbf{T}_B}{\rightarrow} \mathbb{R}^2 \underset{\mathbf{T}_A}{\rightarrow} \mathbb{R}^2$.

(c) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : $ABC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{ABC} : \mathbb{R}^3 \underset{\mathbf{T}_C}{\rightarrow} \mathbb{R}^3 \underset{T_B}{\rightarrow} \mathbb{R} \underset{\mathbf{T}_A}{\rightarrow} \mathbb{R}^3$.

Exercice 10

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

(a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Solution : $T_1(\boldsymbol{e}_1) = T_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_1(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Donc* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi la composition $T_2 \circ T_1$ *correspond à* $A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée ?

Solution : *On a* $T_2 \circ \mathbf{T}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Le domaine de définition est* $\mathbb{R}^2$. *Le domaine d'arrivée est* $\mathbb{R}$.

Partiellement en classe jeudi

Exercice 11

Soient $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $B = (t^2-1, t+1, t-1)$ et $C = (1, t, t^2)$ deux bases de V. Soit $T : V \to V$, $T(p) = p'(t)t + p(0)$.

(a) Calculer la matrice de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

(b) Calculer la matrice de passage entre les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$

(c) Calculer la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{C}$ (ensemble de départ et d'arrivé).

(d) Calculer la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}$ (ensemble de départ et d'arrivé).

Solution :

(a)

$$P_{\mathcal{CB}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} \cdots [b_n]_{\mathcal{C}}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$P_{\mathcal{BC}} = P_{\mathcal{CB}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) $T(1) = 1; T(t) = t; T(t^2) = 2t^2$, *donc, avec*

$$[T]_{CC} = ([T(c_1)]_C [T(c_2)]_C [T(c_3)]_C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d)

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}C}[T]_{CC}P_{C\mathcal{B}} = P_{C\mathcal{B}}^{-1}[T]_{CC}P_{C\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$T(b_1) = 2t^2 - 1 = 2b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_1, \quad T(b_2) = t + 1 = b_2 \quad T(b_3) = t + 1 = b_3$$

Exercice 12

Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Montrer que $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$.

Exercice 13

Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\ker(A) = \ker(B)$

B. $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$

C. $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(B)$

D. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

Exercice 14

Soit A une matrice $m \times n$ et $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto Av$. Soient A' une matrice $m \times n$ ligne-équivalente à A et $T_{A'} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto A'v$.

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\ker T_A = \ker T_{A'}$.

B. $\dim(\ker T_A) = \dim(\ker T_{A'})$.

C. $\mathrm{im}\, T_A = \mathrm{im}\, T_{A'}$.

D. $\dim(\mathrm{im}\, T_A) = \dim(\mathrm{im}\, T_{A'})$.

E. Aucunes des affirmations ci-dessus.

Exercice 15

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ et la matrice de passage $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.