

## Série 4 (Corrigé)

### Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) déterminer si une famille de vecteurs est **libre** (aussi appelée **linéaire indépendante**) ou **liée** (aussi appelée **linéaire dépendante**) ;
- (O.2) déterminer le **sous-espace vectoriel engendré** par une famille de vecteurs ;
- (O.3) connaître la définition d'**application linéaire**, ainsi que quelques propriétés basiques.

### Nouveau vocabulaire dans cette série

- sous-espace vectoriel engendré
- famille génératrice
- famille libre (ou linéaire indépendante)
- SEL homogène
- famille liée (ou linéaire dépendante)
- application linéaire

### Exercice 1

Soit  $W$  un espace vectoriel et  $W_1, W_2 \subseteq W$  deux sous-espaces vectoriels. Montrer que  $W_1 \cap W_2$  est aussi un sous-espace vectoriel.

**Solution :** On sait que  $0 \in W_1 \cap W_2$ , donc l'intersection est non vide. Soient  $v, w \in W_1 \cap W_2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors on sait par hypothèse que  $v + \lambda w \in W_1$  et  $v + \lambda w \in W_2$ . Donc  $v + \lambda w \in W_1 \cap W_2$ , ce qu'on voulait montrer.

### Exercice 2

Soit  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n \times n$ .

- (a) Montrer que le sous-ensemble  $\mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel.
- (b) Montrer que le sous-ensemble de  $\mathcal{A}_{n \times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  constitué des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel.
- (c) Montrer que  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

**Solution :**

- (a)  $0 \in \mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Il suffit donc de montrer que la condition  $\forall i, j, m_{i,j} = m_{j,i}$  est toujours vérifiée quand on additionne deux matrices symétriques ou qu'on multiplie une matrice symétrique par un scalaire.
- (b) La preuve est similaire à celle de (a).
- (c) Toute matrice  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  se décompose en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :  $M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$ . On en déduit que  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . De plus, la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle. En effet  $\forall i, j, m_{i,j} = m_{j,i} = -m_{i,j} = 0$ . Les deux sous-espaces sont donc en somme directe.

### Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1. Soient  $V$  un espace vectoriel et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Alors on a aussi que  $V$  est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et  $H$  est un espace vectoriel.
2. Si  $H$  est un sous-ensemble d'un espace vectoriel  $V$ , alors il suffit que  $0_V$  soit dans  $H$  pour que  $H$  soit un sous-espace vectoriel de  $V$ .

**Solution :** Vrai : a) Un sous-espace vectoriel est en particulier un espace vectoriel. Faux : b) Il faut aussi que  $H$  soit stable par l'addition des vecteurs et par la multiplication par un scalaire.

## Exercices optionnels

### Exercice 4

On rappelle que  $C([0, 1])$  est l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment  $[0, 1]$ .

- (a) L'ensemble de vecteurs  $\{t \mapsto \sin t, t \mapsto \cos t\}$  est-il linéairement indépendant dans  $C([0, 1])$  ?

**Solution : Solution abrégée :** Oui car si  $c_1, c_2$  sont des scalaires tels que  $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors en prenant  $t = 0$  puis  $t = \pi/6$ , on obtient  $c_2 = 0$  (car  $\sin 0 = 0$  et  $\cos 0 = 1$ ) puis  $c_1 = 0$  (car  $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ).

**Solution détaillée :** On rappelle que l'élément zéro de l'espace  $C([0, 1])$  est la fonction  $z(t)$  qui vaut  $z(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Donc, si pour deux fonctions continues  $f_1$  et  $f_2$  (c.a.d., éléments de  $C([0, 1])$ ) il existe un paire de scalaires  $c_1, c_2$  différents de zéro tels que  $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors  $f_1$  et  $f_2$  sont linéairement dépendantes. Par exemple, considérons la fonction  $f_1(t) = \log((t+1)^2)$  et la fonction  $f_2(t) = \log(t+1)$ . Pour les propriétés du logarithme, nous avons  $f_1(t) - 2f_2(t) = 0$  pour toutes les valeurs de  $t$  dans  $[0, 1]$ . Considérons maintenant  $f_1(t) = t$  et  $f_2(t) = 3t - 1$ . La fonction  $f_s(t) = -f_1(t) + f_2(t)$ , définie par  $f_s(t) = 2t - 1$ , vaut zéro pour  $t = 1/2$ , mais ne vaut pas zéro sur tout le segment, ce qui est requis pour que  $f_1$  et  $f_2$  soient linéairement dépendantes.

Soient  $c_1, c_2$  des scalaires tels que  $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Si ceci est vrai pour tout  $t \in [0, 1]$  alors il l'est aussi pour  $t = 0$ . En prenant  $t = 0$ , nous avons  $\sin t = 0$  et  $\cos t = 1$ , ce qui donne  $c_1 \cdot 0 + c_2 = 0$ . Nous avons donc  $c_2 = 0$ . Maintenant, nous devons trouver les valeurs de  $c_1$  telles que  $c_1 \sin t = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . En choisissant une valeur  $t^*$  tel que  $\sin t^* \neq 0$ , comme par exemple  $t^* = \pi/6$ , on obtient  $c_1 \sin t^* = 0$ , ce qui donne  $c_1 = 0$  en divisant les deux côtés par  $\sin t^*$ . Donc,  $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$  si et seulement si  $c_1 = 0$  et  $c_2 = 0$ , ce qui veut dire que  $\cos t$  et  $\sin t$  sont des fonctions continues linéairement indépendantes.

- (b) Même question pour  $\{t \mapsto \sin t, t \mapsto \sin t \cos t, t \mapsto \sin 2t\}$ .

**Solution : Solution abrégée :** Non car il existe une combinaison linéaire non triviale,  $\sin 2t - 2 \sin t \cos t = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Solution détaillée :** Appelons  $f_1(t) = \sin t$ ,  $f_2(t) = \sin t \cos t$  et  $f_3(t) = \sin 2t$ . Dans ce cas, nous avons la relation élémentaire  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ , ce qui implique  $0 \cdot f_1(t) + 2f_2(t) - f_3(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Il existe donc trois scalaires (notamment  $c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = -1$ ) différents de zéro et tels que  $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + c_3 f_3(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , et l'ensemble de vecteurs  $\{f_1, f_2, f_3\}$  de  $\mathcal{C}([0, 1])$  est donc linéairement dépendant.

## Exercice 5

Prouver ou trouver un contre-exemple à l'énoncé suivant : Soit  $V$  un espace vectoriel. Si  $W_1, W_2, W_3$  sont des sous-espaces vectoriels de  $V$  tels que  $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ , alors  $W_1 = W_2$ .

**Solution :** C'est faux. Contre-exemple :  $W_1 = \mathbb{R}^2$ ,  $W_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$  et  $W_3 = \{0\} \times \mathbb{R}$

## Exercice 6

Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane  $CH_4$  par exemple, le méthane  $CH_4$  réagit avec l'oxygène  $O_2$  pour former du dioxyde de carbone  $CO_2$  et de l'eau  $H_2O$  selon



“Pondérer” cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  tels que le nombre total d'atomes de carbone ( $C$ ), d'hydrogène ( $H$ ) et d'oxygène ( $O$ ) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).

Question : Pondérer l'équation (1).

Note : Les chimistes préfèrent les plus petits entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  qui “réalisent” la podération. Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.

**Solution :** On a

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire ce système linéaire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les variables de base sont  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tandis que  $\alpha_4$  est une variable libre. La solution générale est  $\alpha_1 = \alpha_4/2, \alpha_2 = \alpha_4, \alpha_3 = \alpha_4/2$  (infinité de solutions). On donne la solution entière la plus petite :  $\boxed{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2}$ .

## Partiellement en classe

En classe on fera aussi d'autres exercices.

### Exercice 7

On rappelle que  $\mathbb{P}_3$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

- (a) Les vecteurs de  $\mathbb{P}_3$  suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i)  $p_1, p_2, p_3$  tels que  $p_1(t) = 1 - t^2$ ,  $p_2(t) = t^2$ ,  $p_3(t) = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Solution :** Oui. En effet,

$$x_1p_1(t) + x_2p_2(t) + x_3p_3(t) = x_1(1 - t^2) + x_2t^2 + x_3t = t^2(x_2 - x_1) + x_3t + x_1 = 0$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ssi

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

i.e.  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

- (ii)  $p_1, p_2, p_3$  tels que  $p_1(t) = 1 + t + t^2$ ,  $p_2(t) = t + t^2$ ,  $p_3(t) = t^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . **Solution :** Oui.

- (b) Les vecteurs  $p_1, p_2, p_3$  de (ii) forment-ils une base de  $\mathbb{P}_3$ ? **Solution :** Non, car  $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$  et il y a seulement trois vecteurs. Aucun des trois vecteurs ne permet d'engendrer un polynôme de degré égal à 3.

### Exercice 8

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- a) Déterminer le rang de  $A$  et la dimension du noyau de  $A$ .

**Solution :** Les colonnes 1, 2 et 4 forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , donc  $\text{rg}(A) = 3$ . Par le théorème du rang, on a

$$\dim \text{Ker } A = (\text{nombre de colonnes de } A) - \text{rg}(A) = 4 - 3 = 1.$$

- b) Même question pour  $A^T$ .

**Solution :**  $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A) = 3$ .

$$\dim \text{Ker } A^T = (\text{nombre de colonnes de } A^T) - \text{rg}(A^T) = 3 - 3 = 0.$$

- c) On suppose qu'une matrice  $A$  de taille  $7 \times 7$  possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de  $A$ ? Quelle est la dimension du noyau de  $A$ ?

**Solution :**  $A$  est équivalente à la matrice identité de taille  $7 \times 7$ , ainsi  $\text{rg}(A) = 7$  et  $\dim \text{Ker } A = 0$ .

- d) On considère une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  et un vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Quelle doit être la relation entre le rang de  $[A \ \mathbf{b}]$  et le rang de  $A$  pour que l'équation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  soit compatible ?

**Solution :**  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est compatible  $\Leftrightarrow \mathbf{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{Col } A \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}([A \ \mathbf{b}])$ .

### Exercice 9

Soit  $\mathcal{M}_2$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $2 \times 2$ .

- (a) Montrer que les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  données par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont linéairement indépendantes.

$$\begin{aligned} \text{Solution : } \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

- (b) Trouver  $a, b, c, d$  tels que pour  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , les matrices  $A, B, C, D$  forment une base de  $\mathcal{M}_2$ .

**Solution :** On vient en fait de calculer au (i) que  $\text{Span}\{A, B, C\}$  est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce sous-espace est de dimension 3, pour obtenir une base de  $\mathcal{M}_2$  qui est de dimension 4, il suffit de trouver une matrice  $D$  qui n'est pas dans ce sous-espace, c-à-d pas de la forme ci-dessus. Il suffit donc de proposer une matrice  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  telle que  $a \neq c + d$ . On peut donc proposer par exemple  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$ .

Méthode alternative :

$$\begin{aligned} \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 & \alpha_1 + d\alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + d\alpha_4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Observons que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - c - d = 0.$$

Ainsi,  $A, B, C, D$  forment une base de  $\mathcal{M}_2 \Leftrightarrow a - c - d \neq 0$ .

---

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.  
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.