

Série 4 (Corrigé)

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) déterminer si une famille de vecteurs est **libre** (aussi appelée **linéaire indépendante**) ou **liée** (aussi appelée **linéaire dépendante**);
- (O.2) déterminer le **sous-espace vectoriel engendré** par une famille de vecteurs;
- (O.3) connaître la définition d'**application linéaire**, ainsi que quelques propriétés basiques.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- sous-espace vectoriel engendré
- famille génératrice
- famille libre (ou linéaire indépendante)
- SEL homogène
- famille liée (ou linéaire dépendante)
- application linéaire

Exercice 1

Soit W un espace vectoriel et $W_1, W_2 \subseteq W$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que $W_1 \cap W_2$ est aussi un sous-espace vectoriel.

Solution : On sait que $0 \in W_1 \cap W_2$, donc l'intersection est non vide. Soient $v, w \in W_1 \cap W_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on sait par hypothèse que $v + \lambda w \in W_1$ et $v + \lambda w \in W_2$. Donc $v + \lambda w \in W_1 \cap W_2$, ce qu'on voulait montrer.

Exercice 2

Soit $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$.

- (a) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel.
- (b) Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{n \times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel.
- (c) Montrer que $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Solution :

- (a) $0 \in \mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que la condition $\forall i, j, m_{i,j} = m_{j,i}$ est toujours vérifiée quand on additionne deux matrices symétriques ou qu'on multiplie une matrice symétrique par un scalaire.
- (b) La preuve est similaire à celle de (a).
- (c) Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ se décompose en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique : $M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$. On en déduit que $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{n \times n}(\mathbb{R})$. De plus, la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle. En effet $\forall i, j, m_{i,j} = m_{j,i} = -m_{i,j} = 0$. Les deux sous-espaces sont donc en somme directe.

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1. Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V . Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.
2. Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V , alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V .

Solution : Vrai : a) Un sous-espace vectoriel est en particulier un espace vectoriel. Faux : b) Il faut aussi que H soit stable par l'addition des vecteurs et par la multiplication par un scalaire.

Exercices optionnels

Exercice 4

On rappelle que $C([0, 1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$.

- (a) L'ensemble de vecteurs $\{t \mapsto \sin t, t \mapsto \cos t\}$ est-il linéairement indépendant dans $C([0, 1])$?

Solution : Solution abrégée : Oui car si c_1, c_2 sont des scalaires tels que $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors en prenant $t = 0$ puis $t = \pi/6$, on obtient $c_2 = 0$ (car $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$) puis $c_1 = 0$ (car $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$).

Solution détaillée : On rappelle que l'élément zéro de l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ est la fonction $z(t)$ qui vaut $z(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Donc, si pour deux fonctions continues f_1 et f_2 (c.a.d., éléments de $\mathcal{C}([0, 1])$) il existe un paire de scalaires c_1, c_2 différents de zéro tels que $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors f_1 et f_2 sont linéairement dépendantes. Par exemple, considérons la fonction $f_1(t) = \log((t+1)^2)$ et la fonction $f_2(t) = \log(t+1)$. Pour les propriétés du logarithme, nous avons $f_1(t) - 2f_2(t) = 0$ pour toutes les valeurs de t dans $[0, 1]$. Considérons maintenant $f_1(t) = t$ et $f_2(t) = 3t - 1$. La fonction $f_s(t) = -f_1(t) + f_2(t)$, définie par $f_s(t) = 2t - 1$, vaut zéro pour $t = 1/2$, mais ne vaut pas zéro sur tout le segment, ce qui est requis pour que f_1 et f_2 soient linéairement dépendantes.

Soient c_1, c_2 des scalaires tels que $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si ceci est vrai pour tout $t \in [0, 1]$ alors il l'est aussi pour $t = 0$. En prenant $t = 0$, nous avons $\sin t = 0$ et $\cos t = 1$, ce qui donne $c_1 \cdot 0 + c_2 = 0$. Nous avons donc $c_2 = 0$. Maintenant, nous devons trouver les valeurs de c_1 telles que $c_1 \sin t = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. En choisissant une valeur t^* tel que $\sin t^* \neq 0$, comme par exemple $t^* = \pi/6$, on obtient $c_1 \sin t^* = 0$, ce qui donne $c_1 = 0$ en divisant les deux côtés par $\sin t^*$. Donc, $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$ si et seulement si $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$, ce qui veut dire que $\cos t$ et $\sin t$ sont des fonctions continues linéairement indépendantes.

(b) Même question pour $\{t \mapsto \sin t, t \mapsto \sin t \cos t, t \mapsto \sin 2t\}$.

Solution : Solution abrégée : Non car il existe une combinaison linéaire non triviale, $\sin 2t - 2 \sin t \cos t = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Solution détaillée : Appellons $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \sin t \cos t$ et $f_3(t) = \sin 2t$. Dans ce cas, nous avons la relation élémentaire $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, ce qui implique $0 \cdot f_1(t) + 2f_2(t) - f_3(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Il existe donc trois scalaires (notamment $c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = -1$) différents de zéro et tels que $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + c_3 f_3(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, et l'ensemble de vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathcal{C}([0, 1])$ est donc linéairement dépendant.

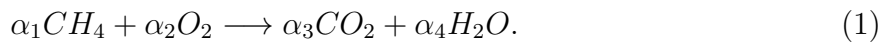
Exercice 5

Prouver ou trouver un contre-exemple à l'énoncé suivant : Soit V un espace vectoriel. Si W_1, W_2, W_3 sont des sous-espaces vectoriels de V tels que $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$, alors $W_1 = W_2$.

Solution : C'est faux. Contre-exemple : $W_1 = \mathbb{R}^2$, $W_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $W_3 = \{0\} \times \mathbb{R}$

Exercice 6

Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane CH_4 par exemple, le méthane CH_4 réagit avec l'oxygène O_2 pour former du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O selon



"Pondérer" cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tels que le nombre total d'atomes de carbone (C), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).

Question : Pondérer l'équation (1).

Note : Les chimistes préfèrent les plus petits entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ qui "réalisent" la pondération. Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.

Solution : On a

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire ce système linéaire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les variables de base sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tandis que α_4 est une variable libre. La solution générale est $\alpha_1 = \alpha_4/2, \alpha_2 = \alpha_4, \alpha_3 = \alpha_4/2$ (infinité de solutions). On donne la solution entière la plus petite : $\boxed{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2}$.

Partiellement en classe

En classe on fera aussi d'autres exercices.

Exercice 7

On rappelle que \mathbb{P}_3 est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

(a) Les vecteurs de \mathbb{P}_3 suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Solution : Oui. En effet,

$$x_1 p_1(t) + x_2 p_2(t) + x_3 p_3(t) = x_1(1 - t^2) + x_2 t^2 + x_3 t = t^2(x_2 - x_1) + x_3 t + x_1 = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{i.e. } x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

(ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$. **Solution :** Oui.

(b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de \mathbb{P}_3 ? **Solution :** Non, car $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ et il y a seulement trois vecteurs. Aucun des trois vecteurs ne permet d'engendrer un polynôme de degré égal à 3.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A .

Solution : Les colonnes 1, 2 et 4 forment une base de \mathbb{R}^3 , donc $\text{rg}(A) = 3$. Par le théorème du rang, on a

$$\dim \text{Ker } A = (\text{nombre de colonnes de } A) - \text{rg}(A) = 4 - 3 = 1.$$

b) Même question pour A^T .

Solution : $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A) = 3$.

$$\dim \text{Ker } A^T = (\text{nombre de colonnes de } A^T) - \text{rg}(A^T) = 3 - 3 = 0.$$

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

Solution : A est équivalente à la matrice identité de taille 7×7 , ainsi $\text{rg}(A) = 7$ et $\dim \text{Ker } A = 0$.

- d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[A \ \mathbf{b}]$ et le rang de A pour que l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soit compatible ?

Solution : $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible $\Leftrightarrow \mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{Col } A \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}([A \ \mathbf{b}])$.

Exercice 9

Soit \mathcal{M}_2 l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 .

- (a) Montrer que les matrices A , B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

Solution : $\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

- (b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de \mathcal{M}_2 .

Solution : On vient en fait de calculer au (i) que $\text{Span}\{A, B, C\}$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce sous-espace est de dimension 3, pour obtenir une base de \mathcal{M}_2 qui est de dimension 4, il suffit de trouver une matrice D qui n'est pas dans ce sous-espace, c-à-d pas de la forme ci-dessus. Il suffit donc de proposer une matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $a \neq c + d$. On peut donc proposer par exemple $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$.

Méthode alternative :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 & \alpha_1 + d\alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + d\alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Observons que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - c - d = 0.$$

Ainsi, A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_2 \Leftrightarrow a - c - d \neq 0$.

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.