Série 4

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) déterminer si une famille de vecteurs est **libre** (aussi appelée **linéaire indépendante**) ou **liée** (aussi appelée **linéaire dépendante**) ;

(O.2) déterminer le **sous-espace vectoriel engendré** par une famille de vecteurs ;

(O.3) connaître la définition d'**application linéaire**, ainsi que quelques propriétés basiques.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- sous-espace vectoriel engendré
- famille génératrice
- famille libre (ou linéaire indépendante)
- SEL homogène
- famille liée (ou linéaire dépendante)
- application linéaire

Exercice 1

Soit W un espace vectoriel et $W_1, W_2 \subseteq W$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que $W_1 \cap W_2$ est aussi un sous-espace vectoriel.

Exercice 2

Soit $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$.

(a) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel.

(b) Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel.

(c) Montrer que $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1. Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.

2. Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.

Exercices optionnels

Exercice 4

On rappelle que $C([0,1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$.

(a) L'ensemble de vecteurs $\{t \mapsto \sin t,\ t \mapsto \cos t\}$ est-il linéairement indépendant dans $C([0,1])$?

(b) Même question pour $\{t \mapsto \sin t,\ t \mapsto \sin t \cos t,\ t \mapsto \sin 2t\}$.

Exercice 5

Prouver ou trouver un contre-exemple à l'énoncé suivant : Soit V un espace vectoriel. Si W_1, W_2, W_3 sont des sous-espaces vectoriels de V tels que $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$, alors $W_1 = W_2$.

Exercice 6

Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane CH_4 par exemple, le méthane CH_4 réagit avec l'oxygène O_2 pour former du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O selon

$$\alpha_1 CH_4 + \alpha_2 O_2 \longrightarrow \alpha_3 CO_2 + \alpha_4 H_2O. \tag{1}$$

"Pondérer" cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs α_1, α_2, α_3, α_4 tels que le nombre total d'atomes de carbone (C), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).
Question : Pondérer l'équation (1).
Note : Les chimistes préfèrent les plus petits entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ qui "réalisent" la podération.
Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.

Partiellement en classe

En classe on fera aussi d'autres exercices.

Exercice 7

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

(a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

  (i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

  (ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.

b) Même question pour A^T.

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\,A\ \mathbf{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soit compatible ?

Exercice 9

Soit $\mathcal{M}_2$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.

(a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

(b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_2$.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.