Série 3

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) Matrices élémentaires et opérations sur les lignes

(O.2) Algorithme pour trouver l'inverse d'une matrice

(O.3) Critères d'inversibilités

(O.4) connaître et manipuler des **espaces vectoriels (abstraits)**, ainsi que les propriétés basiques ;

(O.5) connaître et manipuler des **sous-espaces vectoriels** ;

Nouveau vocabulaire dans cette série

- Matrices élémentaires
- espace vectoriel
- sous-espace vectoriel

Exercice 1

(a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de taille 2×2. Démontrer que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Soient A, B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$.

(b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi.

(c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible.

(d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible quel que soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 4

Soient A et B des matrices $n \times n$. Montrer les assertions suivantes.

a) Si A et B sont des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures), alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).

b) Si A et B sont deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) avec uniquement des coefficients 1 sur la diagonale, alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) avec uniquement des coefficients 1 sur la diagonale.

c) Si A est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Exercices optionnels

Exercice 5

a) Calculer la matrice inverse (quand elle existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 6 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 6

Une matrice carrée M est dite *anti-symétrique* si $M^T = -M$.

a) Soit A une matrice anti-symétrique de taille $n \times n$. Montrer que

i) pour toute matrice B de taille $n \times n$ anti-symétrique, $A + B$ est anti-symétrique ;

ii) si A est inversible, alors A^{-1} est anti-symétrique.

b) Soit M une matrice de taille $n \times n$. Montrer que M admet une décomposition sous la forme $M = S + A$, où S est une matrice symétrique et A une matrice anti-symétrique. *(Indice : on pourra considérer les matrices $\frac{1}{2}(M + M^T)$ et $\frac{1}{2}(M - M^T)$)*

c) Calculer la décomposition des matrices M de taille 3×3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Calculer les produits matriciels suivants :

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\,; \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\,; \qquad \text{c)}\quad \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

En déduire le théorème suivant : Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, alors le produit AB peut être obtenu par la formule colonne-ligne suivante :

$$AB = \mathrm{col}_1(A)\mathrm{lig}_1(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A)\mathrm{lig}_n(B), \tag{1}$$

où $\mathrm{col}_k(A)$ est la matrice $m \times 1$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A, et $\mathrm{lig}_k(B)$ est la matrice $1 \times p$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B.

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Si A et B sont deux matrices de taille 2×2 dont les colonnes sont désignées par $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ et $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, alors $AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$.

(b) Soient A, B et C trois matrices de taille 3×3. Alors $AB + AC = (B + C)A$.

(c) Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. Alors $A^T + B^T = (A + B)^T$.

(d) La transposée d'un produit de matrices est égale au produit de leurs transposées dans le même ordre.

Partiellement en classe mardi

Exercice 9

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4.

(a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.

(b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.

(c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.

(d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions (a), (b) et (c).

Exercice 10

(a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(i) en utilisant la formule générale de l'inverse d'une matrice 2×2 ;

(ii) en mettant la matrice $(A \quad I_2)$ sous forme échelonnée réduite.

(b) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ en mettant la matrice $(A \quad I_3)$ sous forme échelonnée réduite.

Exercice 11

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possibles, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

Partiellement en classe jeudi

Exercice 12

Soit $\mathbb{S} = \{y = (..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...) = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \ : \ \forall k \in \mathbb{Z}, y_k \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des suites réelles sur $\mathbb{Z}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $w = y+z$: $w_k = y_k + z_k$, $k \in \mathbb{Z}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \alpha y$: $w_k = \alpha y_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que $\mathbb{S}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $f+g$: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, αf : $(\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathbb{F}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

b) On munit $\mathbb{F}$ des deux lois définies plus haut. Montrer que $\mathbb{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

c) Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $C(\mathbb{R})$, muni des deux mêmes lois, est un espace vectoriel.

d) On munit $C(\mathbb{R})$ de ces deux mêmes lois. Montrer que

$$C^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ est dérivable de dérivée continue}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.