# Série 1

**Objectifs de cette série**

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) reconnaître un **système d'équations linéaires (SEL)** et l'écrire sous **forme matricielle** ;

(O.2) **représenter graphiquement les solutions** d'un SEL avec 2 variables ;

(O.3) connaître les SEL **incompatibles** et **compatibles**, **déterminés** et **indéterminés** ;

(O.4) connaître la notion de **SEL équivalents**, les **opérations élémentaires**, leur propriété fondamentale, et les **matrices échelonnées** et **échelonnées réduites**.

**Nouveau vocabulaire dans cette série**

- système d'équations linéaires (SEL)
- représentation matricielle d'un SEL
- SEL compatible in/déterminé
- opération élémentaire sur les lignes
- forme/matrice échelonnée
- solution d'un SEL
- matrice augmentée
- SEL incompatible
- SEL équivalents
- forme/matrice échelonnée réduite

**Exercice 1(Représentation graphique)**

Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

a) Dessiner la solution avec les paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 3$.

b) Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta$ la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$ ?

c) Trouver les valeurs de $\alpha, \beta$ (si elles existent) telles que le système

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \\ (\alpha - 1)\, x_1 & + & (\beta + 1)\, x_2 & = & 0 \end{array}$$

(i) possède une infinité de solutions ;

(ii) ne possède aucune solution ;

(iii) possède une solution unique.

**Exercice 2(Opérations sur les lignes)**

Les opérations suivantes sont-elles valides ?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3(V/F sur opérations élémentaires et ensemble des solutions)**

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Toutes les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles.

b) Une matrice de taille $5 \times 6$ a 6 lignes.

c) L'ensemble des solutions d'un système linéaire dans les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une liste de nombres $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui, substitués à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement, rendent correcte chaque équation du système.

d) L'existence et l'unicité d'une solution sont deux questions fondamentales pour un système linéaire.

**Exercice 4((V/F sur opérations élémentaires et ensemble des solutions)**

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée ne changent jamais l'ensemble des solutions du système linéaire associé.

b) Deux matrices sont équivalentes par rapport aux lignes si elles ont le même nombre de lignes.

c) Un système incompatible a plus d'une solution.

d) Si les matrices augmentées de deux systèmes linéaires sont équivalentes par rapport aux lignes, alors les deux systèmes ont le même ensemble de solutions.

# Partiellement en classe mardi

**Exercice 5(Équations linéaires et non linéaires)**

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$

c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right) x_2 + 3 = \pi x_1$

d) $3x_1 + 2x_2 + 4\, x_3\, x_4 = 5$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}\, x_3 + x_9$

# Partiellement en classe jeudi

**Exercice 6(Matrice augmentée et algorithme de Gauss)**

(i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

(ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$

**Exercice 7(Forme échéllonée réduite)**

(i) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.

(ii) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 8(Forme échéllonée)**

Voici des matrices augmentées de quelques systèmes linéaires.

(i) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.

(ii) Identifier les variables de bases et les variables libres.

(iii) Déterminer si les systèmes linéaires correspondants possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.