Série 2

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) calculer la **forme échelonnée réduite** d'une matrice, avec la méthode de Gauss ;

(O.2) déterminer les **variables liées** et **variables libres** ;

(O.3) calculer les **solutions d'un SEL** à partir de la forme échelonnée réduite ;

(O.4) exprimer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme **combinaison linéaire** d'autres vecteurs, si possible.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- méthode d'élimination de Gauss
- variables libres (ou fondamentales)
- variables liées (ou de base)
- combinaison linéaire

Exemple de passage de la forme échelonnée réduite à la solution générale
Forme échelonnée réduite (de la matrice augmentée) :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\pi \end{pmatrix}$$

Le système est compatible, il y a une solution (au moins). Variables de bases : x_1, x_4, x_5. Variables libres : x_2, x_3. Il y a une infinité de solutions. Solution générale :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 3 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 \\ x_4 & = & 2 \\ x_5 & = & -\pi \end{array} \right.$$

Définition : Si les coefficients $b_1, ..., b_m$ sont tous nuls, on dit que le système est **homogène**, autrement qu'il est hétérogène. Un système homogène est toujours compatible car il a au moins la solution **triviale** $(0, 0, ..., 0)$.

Exercice 1

Pour chacun des systèmes suivants :

1) Écrire la matrice augmentée.

2) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.

3) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & & & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & = & -1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array}\right.$

Partiellement en classe mardi

Exercice 2

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$

Exercice 3

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2h-4 \\ -1 & -1 & 2 & -3-h \end{pmatrix},$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Discutez la taille de l'ensemble des solutions selon le paramètre h.

Partiellement en classe jeudi

Exercice 4

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA

b) AA^T, A^TA, BA^T, BC^T, C^TA, BD^T, D^TB

Exercice 5

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. *(Idée : écrire AB sous la forme $(A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2)$)*

(b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a t-on $AB = BA$?

(d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Une matrice A de taille $m \times n$ ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices B de taille $p \times m$.

(b) Le produit matriciel est commutatif.

(c) Si le produit de deux matrices A et B est $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

(d) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Exercice 7

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.