Algèbre linéaire
Chapitre 9 : Produit scalaire et orthogonalité

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 10

Réviser

- Calendrier de fin d'année.
- Travailler et discuter ensemble.
- Comprendre les matrices associées à des transformations linéaires et les changements de base.
- Prendre beaucoup des pauses (mais éviter la procrastination) !

9.1 Géométrie dans le plan et l'espace I

Définition

Le *produit scalaire Euclidien* sur $\mathbb{R}^n$ est l'application $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n,$$

ceci pour tout $u = (u_1, , \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- $u \cdot v = v \cdot u$;
- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
- $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda u \cdot v$;
- $u \cdot u \geq 0$ et si $u \cdot u = 0$, alors $u = 0$.

Définition

La *longueur* (ou *norme*) d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$.

Définition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non-nuls. Alors l'*angle* entre les droites de vecteurs directeurs u, v est défini comme étant l'angle $0 \leq \theta \leq \pi$ tel que

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}.$$

9.2 Produits scalaires, définition, exemples

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition

Un *produit scalaire* sur V est une application $\langle u, v\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $u, v, w \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$. *(Symétrie)*
- $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$. *(Additivité)*
- $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle = \langle u, \alpha v\rangle$. *(Combiné avec 2. => Bilinéarité)*
- $\langle u, u\rangle \geq 0$ et si $\langle u, u\rangle = 0$, alors $u = 0$. *(Définie positivité)*

Pour $u, v \in V$, le nombre réel $\langle u, v\rangle$ est appelé *produit scalaire de u et v*.

9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Définition

On définit la *norme* de $v \in V$, notée $||v||$, par $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
On définit la *distance* entre deux vecteurs $u, v \in V$ comme étant $||u - v||$.

Théorème (Cauchy-Schwarz)

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||, \text{ pour tout } u, v \in V.$$

Définition

L'*angle* θ entre u et v est défini tel que $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}$.

9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Définition

On dit que u et v sont *orthogonaux* si $\langle u, v\rangle = 0$.

Théorème (Inégalité du triangle)

Pour tout $u, v \in V$, on a $$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Théorème (Théorème de Pythagore généralisé)

Supposons que $u_1, \ldots, u_t \in V$ soient des vecteurs deux-à-deux orthogonaux (i.e. $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq t$). Alors

$$\|u_1 + \cdots + u_t\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_t\|^2.$$

Question 1

Vrai/Faux : Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors chaque ligne de A est orthogonale à tous les vecteurs dans $\ker(A)$ (par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$).

A. Vrai

B. Faux

Question 2

Vrai/Faux : Soit V un espace vectoriel et $\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soient $u, v \in V$ deux vecteurs. Alors u et v sont orthogonaux si et seulement si la distance entre u et v est la même que la distance entre u et $-v$.

A. Vrai

B. Faux

Question 3a

Vrai/faux : Une matrice de dimension $m \times n$ avec $m > n$ peut avoir des lignes orthogonales.

A. Vrai

B. Faux

Question 3b

Vrai/faux : Une matrice de dimension $m \times n$ avec $m > n$ peut avoir des lignes orthonormales.

A. Vrai

B. Faux

Question 4

Si U est une matrice $m \times n$ avec des colonnes orthonormales, alors $U^T U = I_n$.

A. Vrai

B. Faux : $UU^T = I_m$

C. Pas toujours, ça dépend

9.5 Bases orthogonales, orthonormales/orthonormées

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Définition

Soit $S \subset V$ un sous-ensemble de V.
On dit que S est une *famille orthogonale* si $\langle u, v\rangle = 0$ pour tous $u, v \in S$ et que S est une *famille orthonormale* si de plus $\langle u, u\rangle = 1$ pour tout $u \in S$.
Si S est une base de V, alors on parle de *base orthogonale* ou respectivement *orthonormale*.

Proposition

Soit $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base orthogonale de V. Alors

$$([v]_{\mathscr{B}})_i = \frac{\langle v, v_i\rangle}{\|v_i\|^2}, \qquad \text{pour tout } v \in V \text{ et } 1 \leq i \leq n.$$

Si $\mathscr{B}$ est orthonormale, alors on a

9.6 Comment trouver une base orthogonale/orthonormale ? Première étape

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Proposition

Soit $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ une famille orthogonale de vecteurs non-nuls. Alors S est une famille libre.

Définition

Pour $u, v \in V$, on définit la *projection orthogonale de u sur v* par $\mathrm{proj}_v u = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v$.

Proposition

Les affirmations suivantes sont vérifiées.

- Pour tout $u, v \in V$, le vecteur $\mathrm{proj}_v u \in V$ appartient à $\mathrm{Vect}(\{v\})$.
- Pour tout $u, v \in V$, on a $\langle u - \mathrm{proj}_v u, v\rangle = 0$.

9.7 Le procédé de Gram-Schmidt I

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ une famille de vecteurs dans V. Alors en posant successivement

$$\begin{aligned}
v_1 &= x_1, \\
v_2 &= x_2 - \mathrm{proj}_{v_1} x_2, \\
v_3 &= x_3 - \mathrm{proj}_{v_1} x_3 - \mathrm{proj}_{v_2} x_3, \\
&\vdots \\
v_k &= x_k - \mathrm{proj}_{v_1} x_k - \mathrm{proj}_{v_2} x_k - \cdots - \mathrm{proj}_{v_{k-1}} x_k,
\end{aligned}$$

alors la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ ainsi obtenue est une famille orthogonale.

Définition

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un *espace euclidien*.

9.7 Le procédé de Gram-Schmidt II

Théorème

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants dans V. Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille S définit une suite de vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ telle que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est une famille de vecteurs deux-à-deux orthogonaux, non-nuls et donc linéairement indépendants. De plus, on a

$$\text{Vect}(S) = \text{Vect}(v_1, \ldots, v_k).$$

- Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de V, le procédé donne une base orthogonale $(v_1, \ldots, v_n)$ de V.
- Si l'on souhaite avoir une base orthonormale de V, il suffit de normaliser la base obtenue en 1.

Question 5

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base $\{w_1, w_2\}$ du sous-espace vectoriel $V = \text{Vect}\{w_1, w_2\} \subset \mathbb{R}^3$, où $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Question 6

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base $\{w_1, w_2\}$ du sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{R}^4$, où

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Question 7

Vrai/Faux : Soit A une matrice $n \times n$ telle que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Alors A est inversible.

A. Vrai

B. Faux

Question 8

Vrai/Faux : Soit A une matrice $n \times n$ telle que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Alors les lignes de A forment une base orthonormée.

A. Vrai

B. Faux

Question 9

Soit B une matrice de taille $m \times n$ telle que $BB^T = I_m$. Alors

A. Les colonnes de B forment un ensemble orthonormé

B. Les lignes de B forment un ensemble orthonormé

C. $B^T B = I_n$

D. B est inversible

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 9.8-9.12 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 9.71 : Faire quelques exercices en ligne.

Algèbre linéaire
Chapitre 9 : Produit scalaire et orthogonalité

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 10

9.8 La projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Définition

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. L'*orthogonal à* W *dans* V est le sous-ensemble de V défini par

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

Proposition

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors le sous-ensemble $W^\perp$ de V est un sous-espace vectoriel de V.

Proposition

Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors pour tout $v \in V$, il existe $w \in W$ et $x \in W^\perp$ tels que $v = w + x$. De plus, w et x sont uniquement déterminés par v.

Question 10

Soient $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et soit $W = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, sans normalisation et sans changer l'ordre, appliqué à la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ de W nous fournit une base orthogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ de W, où

A. $v_3 = x_3 - v_1 + v_2$
B. $v_3 = x_3 + 9v_1 - 9v_2$
C. $v_3 = x_3 + v_1 - v_2$
D. $v_3 = x_3$

Question 11

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si v est dans $W^\perp$ et dans W, alors $v = 0$.

A. Vrai

B. Faux

Question 12

Soit $W = Vect\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$. Trouver une base de $W^{\perp}$.

9.9 La projection orthogonale : remarques supplémentaires

Corollaire

Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W.$$

Corollaire

Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors

$$\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W.$$

9.10 La meilleure approximation quadratique

Proposition

Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors pour tout $x \in V$ et tout $y \in W$, on a

$$||x - \text{proj}_W x|| \leq ||x - y||.$$

Définition

Soient V un espace euclidien, $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V et $x \in V$. Alors le vecteur $\text{proj}_W x$ est appelé la *meilleure approximation quadratique* (ou la *meilleure approximation au sens des moindres carrés*) de x *par un vecteur dans* W.

9.11 La meilleure approximation quadratique : exemple

Proposition

Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors pour tout $x \in V$ et tout $y \in W$, on a

$$||x - \mathrm{proj}_W x|| \leq ||x - y||.$$

Définition

Soient V un espace euclidien, $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V et $x \in V$. Alors le vecteur $\mathrm{proj}_W x$ est appelé la *meilleure approximation quadratique* (ou la *meilleure approximation au sens des moindres carrés*) de x *par un vecteur dans* W.

Question 13

Vrai/faux : Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $y \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $p_W(y) = y$.

A. Vrai

B. Faux

Question 14

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $W = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$. Calculer la décomposition $v = z + p_W(v)$, où $z \in W^\perp$.

Question 14bis

Calculer la droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-1,3),(1,0),(0,3)$.
Par où passe cette droite en $x=-1,1$ et 0 ?

Question 15

Soient $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $W = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Alors, le projeté orthogonal (par rapport au produit scalaire usuel) de v sur W est

A. $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

9.12 Solution au sens des moindres carrés

Définition

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^T$. Aussi, désignons par $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée à A. Une solution du système $AX = b$ *au sens des moindres carrés* est une solution du système

$$AX = \mathrm{proj}_{\mathrm{im}(\phi)} b.$$

Théorème

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^T$. Alors une solution du système $AX = b$ au sens des moindres carrés est une solution du système $A^T AX = A^T b$.

Question 16

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $Ax = b$ satisfait

A. $\hat{x}_2 = 1/6$
B. $\hat{x}_2 = -35/6$
C. $\hat{x}_2 = 41/6$
D. $\hat{x}_2 = -5/6$

Question 17

Quelle affirmation est vraie pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$?

A. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution

B. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution au sens des moindres carrées

C. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution.

D. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution au sens des moindres carrées.

Question 18

Soit $u_1, \ldots, u_p$ une base orthonormée d'un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et soit U la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Montrer que $p_W(y) = UU^T y$.

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos sur la régression linéaire (liens sur Moodle).
- MOOC 9.13 - 9.14 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 9.15 : Faire quelques exercices en ligne.