

Algèbre linéaire

Chapitre 8: diagonalisation

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 10

EPFL

8.11 Valeurs propres complexes

Théorème (Théorème fondamental de l'algèbre)

Soit $p(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ un polynôme à coefficients dans \mathbb{C} . Alors $p(x)$ se factorise en un produit de facteurs linéaires, i.e. il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \dots, \mu_{2s} \in \mathbb{C}$ tels que

$$p(x) = \pm(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r)(t - \mu_1) \cdots (t - \mu_{2s}).$$

De plus, si $\nu = a + ib \in \mathbb{C}$ est une racine de $p(x)$, alors $\bar{\mu} = a - ib$ est également une racine de $p(x)$.

Critère de diagonalisabilité sur \mathbb{C} :

Une transformation linéaire $\phi : V \rightarrow V$ d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de ϕ est égale à sa multiplicité algébrique.

Valeurs propres complexes, exemple

Est-ce que la matrice suivante est diagonalisable dans \mathbb{R} ? et dans \mathbb{C} ?
Si oui, calculer sa diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres complexes, exemple

$$\begin{aligned}c_A(t) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 - t & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & \frac{1}{2} - t \end{vmatrix} = (2 - t) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} - t \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(2 - t) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - t & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\&= +\frac{\sqrt{3}}{2}(2 - t) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} - t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - t) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2(t-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \\&= (2 - t) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2})}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} + (t - \frac{1}{2})^2 \end{vmatrix} = (2 - t) \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - t + t^2 \right) = (2 - t)(1 - t + t^2)\end{aligned}$$

Valeurs propres complexes, exemple

8.10 Méthode de diagonalisation pour A $n \times n$

- Calculer $c_A(t) = \det(A - tI)$.
- Trouver les racines $c_A(t)$, c'est-à-dire, les valeurs propres de A .
- Si $c_A(t)$ possède (au moins) un facteur degré 2 irréductible dans \mathbb{R} , alors A n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .
- Pour chaque valeur propre λ de A , trouver $\dim E_\lambda$ ainsi qu'une base de E_λ .
- Pour chaque valeur propre λ de A , comparer $\dim E_\lambda$ avec la multiplicité algébrique de λ . Si ces dernières sont égales, alors A est diagonalisable. Dans le cas contraire, elle ne l'est pas.
- Si A est diagonalisable, alors la réunion des bases des espaces propres est une base (notons-la \mathcal{B}) de V .
- La matrice $D = [T_A]_{\mathcal{B}}$ est diagonale. En particulier,
 - la diagonale de D contient les valeurs propres, repétées selon leur multiplicité,
 - on définit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de base des espaces propres, dans le même ordre
 - et $A = PDP^{-1}$.

Chapitre 8 : Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation

Calculs à savoir faire :

- 1 Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice.
- 2 Calculer les valeurs propres d'une matrice.
- 3 Calculer les espaces propres d'une matrice.
- 4 Calculer la multiplicité algébrique et géométrique d'une valeur propre.
- 5 Déterminer si une matrice est diagonalisable et si oui, calculer sa diagonalisation, i.e.
 - définir la matrice diagonale D qui contient les valeurs propres, repétées selon leur multiplicité,
 - définir P comme la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de base des espaces propres, dans le même ordre
 - et dire que $A = PDP^{-1}$.

Série 10, ex 11

Est-que la matrice suivante est diagonalisable dans \mathbb{R} ? et dans \mathbb{C} ?
Si oui, calculer sa diagonalisation.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Série 10, ex 11

$$\begin{aligned}
 c_B(t) &= \left| \begin{array}{cccc} -t-1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{array} \right| : \xrightarrow{L(2,4,1)} \left| \begin{array}{cccc} -t-1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1-t & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{array} \right| \\
 &\quad : \xrightarrow{L(1,4,-2)} \left| \begin{array}{cccc} 1-t & 0 & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1-t & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{array} \right| = (2-t) \left| \begin{array}{ccc} 1-t & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1-t & 1-t \\ -1 & -1 & -t \end{array} \right| \\
 &= (2-t)(1-t) \left| \begin{array}{ccc} 1-t & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -t \end{array} \right| : \xrightarrow{L(3,2,1)} (2-t)(1-t) \left| \begin{array}{ccc} 1-t & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1-t \end{array} \right| \\
 &= (2-t)(1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 2t-2 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) [(1-t)^2 + 2t-2] = -(2-t)(1-t)
 \end{aligned}$$

Série 10, ex 11. Diagonalisable

On admet que le polynôme caractéristique de B est
 $c_B(t) = -(1 - t)^2(1 + t)(2 - t)$. Alors

- A. B est diagonalisable dans \mathbb{R}
- B. B n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R}

Série 10, ex 11. E_{λ_1}

Quel ensemble est une base de l'espace propre E_{λ_1} pour $\lambda_1 = 1$?

A. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

C. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

D. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Série 10, ex 11. E_{λ_2}

Quel ensemble est une base de l'espace propre E_{λ_2} pour $\lambda_2 = -1$?

A. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

C. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

D. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Série 10, ex 11. E_{λ_3}

Quel ensemble est une base de l'espace propre E_{λ_3} pour $\lambda_3 = 2$?

A. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

C. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

D. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Série 10, ex 11. Diagonalisation

Trouver une matrice P telle que $P^{-1}BP$ est diagonale.

Question 2

Vrai/Faux : Soit A une matrice de taille 3×3 qui n'est pas la matrice identité. Si le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = (1 - t)^3$, alors A n'est pas diagonalisable.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 3

Soit B une matrice diagonalisable. Quelles affirmations sont vraies ?

- A. Si B est inversible, alors B^{-1} est diagonalisable.
- B. B^k est diagonalisable pour tout entier $k > 0$.
- C. Toute matrice ligne-équivalente à B est diagonalisable.
- D. Aucune des affirmations ci-dessus n'est toujours vraie.

Question 4

Soient A et B deux matrices avec les mêmes vecteurs propres. Montrer que si A est diagonalisable, alors $AB = BA$.

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 9.1-9.4 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- Facultatif : Se préparer pour l'examen blanc.
- Facultatif : Rédiger une solution pour l'exercice de rédaction.

9.1 Géométrie dans le plan et l'espace I

Définition

Le *produit scalaire Euclidien* sur \mathbb{R}^n est l'application $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n,$$

ceci pour tout $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- $u \cdot v = v \cdot u$;
- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
- $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda u \cdot v$;
- $u \cdot u \geq 0$ et si $u \cdot u = 0$, alors $u = 0$.

9.1 Géométrie dans le plan et l'espace II

Définition

La *longueur* (ou *norme*) d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.

Définition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non-nuls. Alors l'*angle* entre les droites de vecteurs directeurs u, v est défini comme étant l'angle $0 \leq \theta \leq \pi$ tel que

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

9.2 Produits scalaires, définition, exemples

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition

Un *produit scalaire* sur V est une application $\langle u, v \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$:

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$. (*Symétrie*)
- $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$. (*Additivité*)
- $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle = \langle u, \alpha v \rangle$. (*combiné avec 2. => Bilinéarité*)
- $\langle u, u \rangle \geq 0$ et si $\langle u, u \rangle = 0$, alors $u = 0$. (*Définie positivité*)

Pour $u, v \in V$, le nombre réel $\langle u, v \rangle$ est appelé le *produit scalaire de u et v* .

9.3 Norme, inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition

On définit la *norme* de $v \in V$, notée $\|v\|$, par $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

On définit la *distance* entre deux vecteurs $u, v \in V$ comme étant $\|u - v\|$.

Théorème (Cauchy-Schwarz)

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \text{ pour tout } u, v \in V.$$

Définition

L'*angle* θ entre u et v est défini tel que $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

9.4 Orthogonalité, inégalité du triangle, Pythagore

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition

On dit que u et v sont *orthogonaux* si $\langle u, v \rangle = 0$.

Théorème (Inégalité du triangle)

Pour tout $u, v \in V$, on a $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Théorème (Théorème de Pythagore généralisé)

Supposons que $u_1, \dots, u_t \in V$ soient des vecteurs deux-à-deux orthogonaux (i.e. $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq t$). Alors

$$\|u_1 + \cdots + u_t\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_t\|^2.$$

Question 5

Soient $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $u \cdot v$.

- A. 10
- B. 7

C. $\frac{39}{\sqrt{5}}$

D. $\frac{1}{61} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 6

Quels vecteurs sont orthogonaux à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport au produit scalaire usuel ?

A. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 7

Vrai/Faux : Soit A une matrice de taille $m \times n$ alors chaque ligne de A est orthogonale à tous les vecteurs dans $\ker(A)$ (par rapport au produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n).

- A. Vrai
- B. Faux

Question 8

Vrai/Faux : Soit V un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soit $u \in V$ un vecteur fixe. Alors l'application $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(v) = \langle u, v \rangle$ est une application linéaire.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 9

Vrai/Faux : Soit V un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soient $u, v \in V$ deux vecteurs. Alors u et v sont orthogonaux si et seulement si la distance entre u et v est la même que la distance entre u et $-v$.

- A. Vrai
- B. Faux

Devoirs pour mardi :

- MOOC 9.5-9.7 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 9.71 : Faire quelques exercices en ligne.