EPFL - Semestre d'Automne 2015-2016	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Questions personnelles**
Microtechnique	le 18 janvier 2016

Partie A (5 points). Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $W^\perp$ l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à W.

1. (2 points) Montrer que $W^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

On doit montrer que $W^\perp$ est stable pour l'action et l'addition. Soient donc $x, y \in W^\perp$ et α un nombre réel.
1. On montre que $x + y \in W^\perp$ en calculant le produit scalaire avec tout vecteur w de W :

$$(x + y) \cdot w = x \cdot w + y \cdot w = 0 + 0 = 0$$

où on utilise la linéarité du produit scalaire et le fait que x, y sont orthogonaux Ĺ w.

2. On montre de même que $\alpha x \in W^\perp$:

$$(\alpha x) \cdot w = \alpha(x \cdot w) = \alpha(0) = 0$$

2. (1 point) Montrer que $W \cap W^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$.

Soit w un vecteur se trouvant à la fois dans W et $W^\perp$. Alors w est orthogonal à lui-même si bien qu'on a $\|w\|^2 = w \cdot w = 0$. Un vecteur de norme nulle est nul.

3. (2 points) Montrer que $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$.

Méthode 1. On choisit une base *orthogonale* $(v_1, \dots, v_k)$ de W et une base *orthogonale* $(v_{k+1}, \dots, v_m)$ de $W^\perp$. Considérons la famille $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$. On constate d'abord qu'il s'agit d'une famille libre car elle est orthogonale et formée de vecteurs non nuls. En effet tout vecteur v_i est orthogonal à tout autre vecteur v_j, soit parce qu'il s'agit de deux vecteurs d'une base orthogonale, soit parce qu'il s'agit de vecteurs se trouvant l'un dans W et l'autre dans $W^\perp$. La famille $\mathcal{B}$ engendre un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$. Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à V est orthogonal à la fois Ĺ W et à $W^\perp$. Ce vecteur doit donc être nul car il se trouve dans $W^\perp$ et $(W^\perp)^\perp = W$. Par conséquent $V = \mathbb{R}^n$.

Méthode 2. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On pose $w = \mathrm{proj}_W x$ et $v = x - w$. Alors clairement

$$x = w + v$$

Par construction w se trouve dans W et v est dans $W^\perp$.

Partie B (15 points). On considère les matrices $U = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. (3 points) Montrer que U est une matrice orthogonale.

On calcule simplement UU^T (ou U^TU, et c'est d'ailleurs plus simple, l'un des deux calculs suffit). Le calcul matriciel se fait ligne par colonne :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On accepte aussi ceux qui remarquent que les colonnes (ou les lignes) de U sont des vecteurs unitaires et perpendiculaires deux à deux.

2. (12 points) Sachant que U^TAU est diagonale,

(i) (3 points) trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A,

Comme U^TAU est diagonale et que U est orthogonale, on sait que U est une matrice de changement de base orthogonale, i.e. les colonnes de U forment une base orthonormée de vecteurs propres de A. Par conséquent

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \right)$$

(ii) (3 points) calculer toutes les valeurs propres de A et donner son polynôme caractéristique,

Pour trouver les valeurs propres il suffit de calculer le produit matriciel de A avec chacun des vecteurs de base trouvés en (i) :

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \implies \text{Valeur propre : } -3$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \implies \text{Valeur propre : } -3$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{6}/6 \\ -3\sqrt{6}/3 \\ 3\sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \implies \text{Valeur propre :} 3$$

Le polynôme caractéristique est ainsi $(3-t)(3+t)^2$.

(iii) (3 points) identifier les espaces propres de A,

Les calculs de (ii) montrent que

$$E_{-3} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3\\ \sqrt{3}/3\\ \sqrt{3}/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ 0\\ -\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\right)$$

C'est un plan.

$$E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\ -\sqrt{6}/3\\ \sqrt{6}/6\end{pmatrix}\right)$$

C'est une droite.

(iv) (3 points) trouver une matrice diagonale congruente à A.

La matrice D peut être choisie comme étant égale à $U^T AU$. Sans refaire de calculs on utilise les valeurs propres dans l'ordre indiqué par les vecteurs propres de notre nouvelle base pour trouver

$$D = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$