Exercice 1. Soient $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ et $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ deux bases d'un espace vectoriel V. Supposons que $b_1 = 6c_1 - 2c_2$ et $b_2 = 9c_1 - 4c_2$.

(a) Calculer la matrice de changement de base $P = (\mathrm{Id}_V)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

(b) Trouver $(x)_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a)

Soient $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ et $\mathcal{D} = \{\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{d_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{d_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) Calculer la matrice de changement de base $P = (\mathrm{Id})^{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{D}$.

(d) Calculer la matrice de changement de base $Q = (\mathrm{Id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{A}$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{P}_2$, calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique $\mathcal{C}an = (1, t, t^2)$. Puis écrire les coordonnées du vecteur $p = -1 + 2t$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3.

1. Est-ce que $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.
2. Est-ce que $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$?
3. Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ de la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Quelle est la dimension de cet espace propre ?

Exercice 4. Soit A une matrice 3×3 et a un nombre réel. On suppose que

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a$$

Calculer $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et conclure que a est une valeur propre de A.

Exercice 5. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés. On pourra utiliser l'exercice précédent pour l'une des deux valeurs.

Exercice 6.

1. Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice $A = (T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an}$ de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

   b) Donner la matrice $B = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de l'application linéaire T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(C) = X \cdot C$, où X est la matrice de taille 2×2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice $A = (T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an}$ de l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   b) Donner la matrice $B = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de l'application linéaire T par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Exercice 7.

Soit A une matrice de taille 2×2 et $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ a une solution non nulle si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. On pourra s'inspirer d'un exemple de manipulation matricielle vu en cours !
2. Dès maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A\overrightarrow{x}$.
3. Trouver pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
4. Montrer que les deux valeurs trouvées ci-dessus sont des valeurs propres de A.
5. Calculer les espaces propres correspondants aux deux valeurs propres.

Exercice 8.Un exercice théorique plus difficile!
Soient V, W deux espaces vectoriels de dimension finie et $T, S\colon V \to W$ deux applications linéaires. On veut démontrer la double inégalité

$$|\mathrm{rang}(S) - \mathrm{rang}(T)| \leq \mathrm{rang}(S+T) \leq \mathrm{rang}(S) + \mathrm{rang}(T)$$

(a) Montrer que l'application $S+T\colon V \to W$ définie par $(S+T)(v) = S(v) + T(v)$ est linéaire.

(b) Montrer que l'image de $S+T$ est contenue dans $\mathrm{Im}S + \mathrm{Im}T$ et en déduire la deuxième inégalité.

(c) Montrer que $\mathrm{rang}(-T) = \mathrm{rang}(T)$.

(d) Appliquer la partie (b) aux applications linéaires $S+T$ et $-T$ et en déduire la première inégalité.

(e) Construire des exemples où l'une ou l'autre des inégalités est une égalité. On pourra choisir $V = W = \mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Diagonalisation. On considère une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *diagonalisable*, c'est-à-dire qu'elle est semblable à une matrice diagonale D, autrement dit il existe une matrice inversible P telle que $PAP^{-1} = D$.

(a) Montrer que $\det A$ est égal au produit $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$ des valeurs propres de A.

(b) Si $c_A(t) = (t-\lambda)^n$, montrer que $A = D$.

Exercice 10. Choix Multiple.

a. Soit A une matrice de taille 3×3 inversible et λ une valeur propre de A.

☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de $-A$.
☐ Alors λ est une valeur propre de $-A$.
☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.
☐ Alors λ est une valeur propre de A^{-1}.

b. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

☐ Alors seulement 6 est une valeur propre de A.
☐ Alors -6 et -4 sont valeurs propres de A.
☐ Alors 6 et 0 sont valeurs propres de A.
☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

c. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{C}$.
☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.
☐ Alors $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{B}$.
☐ Alors $\mathcal{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ non plus.

d. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$. On pose encore $S = (Id)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ et $T = (Id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

☐ Alors $s_{13} = 0$ et $t_{23} = 0$.
☐ Alors $s_{13} = 9/16$ et $t_{23} = 3/2$.
☐ Alors $s_{13} = -1$ et $t_{23} = -3/4$.
☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

e. Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors

☐ 0 est une valeur propre de A.
☐ A est la matrice nulle.
☐ A n'a pas de valeur propre réelle.
☐ tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.