Exercice 1. Répondre aux questions ci-dessous pour chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 9 & -7 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Les colonnes sont-elles linéairement indépendantes ou linéairement dépendantes ?
2. Les colonnes engendrent-elles $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2. En calculant la forme échelonnée d'une matrice, montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Exercice 3. On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $(x)_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur x dans cette base. Trouver le vecteur $\overrightarrow{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base canonique). Trouver les coordonnées $(y)_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\overrightarrow{y}$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2.

1. Décrire tous les sous-espaces de $\mathbb{P}_2$ (en fonction du nombre d'éléments de leurs bases).
2. Calculer le vecteur de coordonnées du polynôme $f(t) = 1 + 4t + 7t^2$ dans la base $\mathcal{F} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$.

Exercice 5. Trouver une base de l'espace engendré par les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble formé des quatre premiers polynômes de Hermite :

$$\mathcal{F} = \{1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3\}$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$.
2. Quelles sont les coordonnées $[y(t)]_{\mathcal{F}}$ du polynôme $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$?

Remarque. Les polynômes de Hermite sont utiles lors de l'étude d'équations différentielles que l'on rencontre dans des problèmes de physique. Ils se construisent facilement à l'aide de relations de récurrence.

Exercice 7. Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 8.

a. Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $x - y + z = 0$. Trouver une application linéaire $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont W est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

b. Soit U le sous-ensemble des polynômes p de $\mathbb{P}_2$ vérifiant $p(1) = 0$. Trouver une application linéaire $\phi \colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ dont U est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

c. Construire un isomorphisme $F \colon U \to W$. On pourra utiliser la notion de coordonnées pour comparer U avec $\mathbb{R}^2$, puis $\mathbb{R}^2$ avec W.

Exercice 9. Fixons D comme étant la matrice 2×2 : $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
On considère l'application linéaire $T \colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ telle que $T(A) = D \cdot A$, $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

1. Donner la matrice B qui représente l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\det(B) = \det(D)^2$.
3. En déduire que l'application linéaire T est inversible si et seulement si D est inversible. Quelle est son inverse dans ce cas ?

Exercice 10. Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ($A = A^T$). On considère les matrices suivantes de W :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Utiliser la méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W.

Exercice 11. Un exercice un peu comme pour l'examen. Déterminer si les polynômes suivants sont linéairement indépendants.

$$p_1(x) = 1 + x^3 , \qquad p_2(x) = 1 + x + 3x^2 + 2x^3 , \qquad p_3(x) = x + 4x^2 + 2x^3$$

Exercice 12. Deux exemples de dimension infinie. Soit $\mathbb{P}_\infty$ l'espace vectoriel dees polynômes de degré arbitraire. On considère l'es applications $S, T\colon \mathbb{P}_\infty \to \mathbb{P}_\infty$ définies par $S(p(t)) = t \cdot p(t)$ est la multiplication par t et T envoie le polyôme $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ sur $a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1}$.

1. Montrer que S et T sont linéaires.
2. Montrer que S est injective, mais pas surjective.
3. Montrer que T est surjective, mais pas injective.
4. Calculer $T \circ S$.

Exercice 13. Choix Multiple.

a. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0.
☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.
☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.
☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

b. On considère les polynômes $p(t) = (1-t)(1+t) = 1 - t^2$ et $q(t) = (1+t)(1+t) = 1 + 2t + t^2$ de $\mathbb{P}_2$.

☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.
☐ Les polynômes p et q forment une base de $\mathbb{P}_2$.
☐ Le polynôme $q - p$ est le polynôme nul.
☐ $(1+t)p - (1-t)q$ est une combinaison linéaire de p et q.

c. Soit W l'hyperplan dans $\mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.
☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

d. Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors dim$V = k$.
☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors dim$V \geq k$.
☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors dim$V = k$.
☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors dim$V \geq k$.

e. La matrice qui représente une application linéaire $T\colon \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ est de taille

☐ 3×3. ☐ 3×9. ☐ 3×6. ☐ 6×3.

f. Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie par

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d.$$

Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension

☐ 1. ☐ 2. ☐ 3. ☐ 4.

g. Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de Tr :

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.