EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 6**
Informatique	le 18 octobre 2024

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants en utilisant le développement selon une ligne ou une colonne, et la méthode de Gauss d'échelonnage :

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Un cas spécial de la décomposition LU. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer d'abord la décomposition LU de la matrice, remarquer que la matrice U a deux lignes nulles, puis modifier les matrices L et U (légèrement) pour trouver une matrice B de dimension 5×3 et une matrice C de dimension 3×4 telle que $A = BC$.

Exercice 3. Sachant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$, calculer $t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, $\quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

Exercice 4. Montrer que

(a) si A est une matrice inversible, alors $\det(A^{-1}) = 1/\det A$,

(b) si A et P sont des matrices carrées, avec P inversible, alors $\det(PAP^{-1}) = \det A$,

(c) si U est une matrice carrée telle que $U^T U = I$ (on dit que U est une matrice *orthogonale*), alors $\det U = \pm 1$;

(d) si A est une matrice carrée telle que $\det(A^4) = 0$, alors A ne peut pas être inversible.

Exercice 5. Calculer le volume du parallélépipède dont un sommet se trouve à l'origine et les trois sommets adjacents se trouvent en $(1, 4, 0)$, $(-2, -5, 2)$ et $(-1, 2, -1)$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer l'inverse de la matrice A en réduisant la matrice augmentée $[A \mid I_4]$.

(a) Et aussi : Calculer l'inverse de la matrice A en calculant la comatrice et le déterminant.

(b) Laquelle des deux méthodes est plus efficace (i.e., la plus rapide) pour des matrices de grande dimension ?

Exercice 7. Copyright Prof. Abdulle. Résoudre les systèmes en utilisant la règle de Cramer :
(a)

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -8x_3 & = 8 \\ -4x_1 & +5x_2 & +9x_3 & = -9 \end{array}\right.$$

(b)

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +4x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 2 \\ 3x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 8. On rappelle qu'une base d'un espace vectoriel est un système de générateurs linéairement indépendants.

1. Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré 2.
3. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Montrer que les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes. Forment-elles une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
4. Soit $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   sont linéairement indépendantes. Comment faire pour compléter cette famille de quatre matrices en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

Exercice 9. Soient V et W deux espaces vectoriels, T une transformation linéaire : $T : V \to W$ et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ un sous-ensemble de V.

1. Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement dépendant.
2. Supposons que la transformation T est injective, c'est-à-dire que $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement indépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement indépendant.

Exercice 10. Choix Multiple.

a. Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors

☐ $\det D = 30 \det A \det B$;
☐ $\det D = -60 \det A \det B$;
☐ $\det D = 90 \det A \det B$;
☐ $\det D = -120 \det A \det B$.

b. Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A, puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4} \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

c. Soit a, b, c des nombres réels. On considère les quatre polynômes $p(t) = t^2 + t + 1$, $q(t) = t^2 + 2t + a$, $r(t) = t^3 + b$ et $s(t) = t + c$. Alors

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;
☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;
☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est toujours linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_4$;
☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_3$ lorsque $a - c - 1 \neq 0$.

d. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes

☐ pour toutes valeurs de a, b.
☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b.
☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.
☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.

e. Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.

☐ Soit p un vecteur de l'espace vectoriel V des polynômes de degré ≤ 5. Si $p(0) = 0$, alors p est le vecteur nul de V.

☐ Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ un vecteur de l'espace vectoriel V des suites réelles. S'il existe un entier n tel que $x_n = 0$, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est le vecteur nul de V.

Exercice 11. Deux Vrai/Faux pour finir.

(a) Soient A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients réels. Alors le nombre réel $\det(A^{-1}) \det(A + B) \det(B^{-1})$ est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$.

(b) La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & x & 0 \\ 2 & -1 & 0 & x \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $x \notin \{0; 2; -2\}$.