EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 5**
Informatique	le 11 octobre 2024

Exercice 1. Matrices élémentaires.

1. Déterminer les matrices élémentaires 3×3 suivantes :
   - E_1, qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes ;
   - E_2, qui multiplie la deuxième ligne par 8 ;
   - E_3, qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.
2. Les matrices E_1, E_2 et E_3 sont elles inversibles ? Pourquoi ? Si oui, donner leur inverse et l'inverse du produit $E_1\, E_2\, E_3$.
3. Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   A quelle opération élémentaire chacune de ces matrices se rapporte-t-elle ?

Exercice 2. Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3.

1. Dans le plan, soit S la symétrie axiale d'axe $x = -y$. Décrire son inverse s'il existe. Quelles sont les matrices de ces applications ?
2. Même question pour H l'homothétie de rapport 3.

Exercice 4. Matrices triangulaires. Soit A est une matrice carrée triangulaire supérieure de taille $n \times n$.

1. Démontrer que si A est inversible, alors l'inverse A^{-1} est aussi une matrice carrée triangulaire supérieure. on pourra se baser sur la méthode d'inversion basée sur l'algorithme de Gauss.
2. Sous quelle(s) condition(s) une matrice triangulaire supérieure est-elle inversible ? On s'intéressera aux coefficients diagonaux.

Exercice 5. Calculer la décomposition LU de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer qu'en général $(A+B)(A-B) \neq 0$.
Est-ce qu'il y a des cas où l'égalité peut être vraie ?

Exercice 7. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente*.
2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explicite cette fois !) de la matrice $I - C$.
4. Soit $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\overrightarrow{x} = C\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \overrightarrow{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\overrightarrow{x} = (I - C)^{-1}\overrightarrow{b}$.

Exercice 8. Copyright Prof. Abdulle. Calculer les déterminants des quatre matrices suivantes (en utilisant les propriétés du déterminant et sans faire trop de calculs !)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Déterminants de Vandermonde. On considère des nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ et on construit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$. Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle inversible ?

Indication (spoiler alert). Effectuer des opérations sur les lignes de la matrice en utilisant L_2 pour modifier L_3, puis L_1 pour modifier L_2. La même astuce sera utile dans la suite de l'exercice !

Trouver une formule pour le déterminant de la matrice de la matrice 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Vrai ou Faux ?

(1) Les colonnes d'une matrice 3×4 ayant un pivot dans chaque ligne engendrent $\mathbb{R}^4$.
(2) Les colonnes d'une matrice 3×4 ayant un pivot dans chaque ligne engendrent $\mathbb{R}^3$.
(3) Soit A une matrice 3×4 ayant un pivot dans chaque ligne. Alors l'application linéaire $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ est injective.
(4) Soit A une matrice 3×4 ayant un pivot dans chaque ligne. Alors l'application linéaire $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ est surjective..
(5) Les colonnes d'une matrice 4×3 ayant un pivot dans chaque colonne engendrent $\mathbb{R}^4$.
(6) Les colonnes d'une matrice 4×3 ayant un pivot dans chaque colonne engendrent $\mathbb{R}^3$.
(7) Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ forment une famille libre de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Questions à Choix Multiple.

(1) Soit A la matrice 2×2 d'une homothétie de rapport 4 dont le centre est l'origine. Alors
☐ $\det A = 0$
☐ $\det A = 4$
☐ $\det A = 8$
☐ $\det A = 16$

(2) Soit T l'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ obtenue en effectuant d'abord une symétrie axiale d'axe $x = y$, puis la projection orthogonale sur l'axe $x = 0$. Soit A la matrice 2×2 de cette application linéaire.
☐ $\det A = 0$
☐ $\det A = 1$
☐ $\det A = -1$
☐ aucune de ces réponses, l'application n'est pas linéaire

(3) Soit A une matrice de taille 5×5. On change le signe de chaque coefficient pour obtenir la matrice B.
☐ on a toujours $\det A = \det B$
☐ on a toujours $\det A = -\det B$
☐ on a toujours $\det B = 0$
☐ on ne peut rien dire en général

(4) Soient A et B deux matrices élémentaires de taille 5×5. Alors
☐ A^T est une matrice élémentaire pour tout A ;
☐ $-A$ est une matrice élémentaire pour tout A ;
☐ AB est une matrice élémentaire pour tous A, B ;
☐ $\det A = 1$ pour tout A.

(5) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.
☐ Si $AC = BC$, alors $A = B$.
☐ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
☐ Si $C = C^{-1}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
☐ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

(6) Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors
☐ $A + I$ est inversible.
☐ $(A - I)(A + I) = A^2 - I$.

- ☐ $(A + I)(A + I) = A^2 + I$.
- ☐ $(aA)^2 = a(A^2)$.