EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 4**
Informatique	le 4 octobre 2024

Exercice 1.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer AC, BC et CB.

Exercice 2. On se donne les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si elles sont définies, calculer les matrices :

$$AB, CA, CD, DC, A^T A, AA^T.$$

Si elles ne sont pas définies, expliquer pourquoi.

Exercice 3. (a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

(b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T.

Exercice 4. On peut considérer tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme une matrice de dimension $n \times 1$. Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\vec{u}^T \ \vec{v}$ produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Ecrire $\vec{u}^T$ et $\vec{v}^T$.
2. Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u}^T \ \vec{v}$ et $\vec{v}^T \ \vec{u}$?
3. Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit $\vec{u} \ \vec{v}^T$ est appelé produit extérieur.

4. Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u} \ \vec{v}^T$ et $\vec{v} \ \vec{u}^T$?
5. Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Exercice 5. Matrices triangulaires. Une *matrice triangulaire supérieure* est une matrice carrée dont tous les éléments *au dessous* de la diagonale principale sont nuls, autrement dit $a_{ij} = 0$ pour $i > j$. Démontrer les affirmations suivantes :

1. L'ensemble de toutes les matrices triangulaires supérieures de taille $n \times n$ forme un sous-espace vectoriel de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
2. On suppose que A et B sont des matrices carrées $n\times n$. Si A et B sont triangulaires supérieures, alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure.
3. Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, alors leur produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure ayant des 1 sur la diagonale.

Exercice 6. Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{bmatrix},$$

puis utiliser le résultat précédent pour résoudre le système

$$\begin{cases} 3x - 7y & = -4 \\ -6x + 13y & = 1. \end{cases}$$

Résoudre le même système avec la méthode de Gauss et comparer les deux méthodes.

Exercice 7. Injectivité et surjectivité.
(1) Déterminer si les transformations linéaires suivantes sont injectives ou surjectives :

1. $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. $\mathbf{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$.
3. La rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

(2) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Démontrer que si T est surjective alors elle est aussi injective.

Indication. On se ramènera à un problème matriciel que l'on attaquera avec la méthode de Gauss.

Exercice 8. Soit $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application définie par $T(A) = A + A^T$.

1. Déterminer si T est linéaire.
2. Déterminer si T est surjective.
3. Déterminer si T est injective.
4. Déterminer l'ensemble W des matrices qui vérifient $T(A) = 0$ et démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Soit $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$ pour toute matrice $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors A est une matrice scalaire. (Indication : on pourra choisir des matrices B particulières, avec beaucoup de zéros, pour voir ce que signifie cette propriété).

Exercice 10. Soit h un nombre réel et D la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$. On définit une application $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par $T(A) = D \cdot A$.

1. Déterminer si T est linéaire (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
2. Déterminer si T est surjective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
3. Déterminer si T est injective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

Indication. Traiter le cas où D est inversible pour résoudre une équation de type $D \cdot A = B$.

Exercice 11. On définit une application $T : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6$ par $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}$.

Montrer que T est linéaire, injective et surjective.

Exercice 12. Choix Multiple.

a. Les matrices sont de taille $n \times n$.
- ☐ Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
- ☐ Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

b. Soit A une matrice $n \times n$ inversible et B une matrice $n \times p$.
- ☐ Alors $(AB)^T = A^T B^T$.
- ☐ Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si $m = n$.
- ☐ Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- ☐ Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.

c.
- ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est diagonale.
- ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est scalaire, i.e. $C = \lambda I$, où I est la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est diagonale ou C est diagonale.
- ☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est scalaire ou C est scalaire.

d. Soit A une matrice de taille 7×8 et T l'application linéaire définie par $T\overrightarrow{x} = A \cdot \overrightarrow{x}$. Alors $\overrightarrow{x}$ est un vecteur de

☐ $\mathbb{R}^7$ ☐ $\mathbb{R}^8$ ☐ $\mathbb{R}^{15}$ ☐ $\mathbb{R}^{56}$

e. Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

☐ Alors BA est une matrice $n \times n$.
☐ Alors A^T est une matrice $m \times n$.
☐ Alors A représente une application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
☐ Alors $(AB)^T$ est une matrice $p \times m$.