EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 3**
INFORMATIQUE	le 27 septembre 2024

Exercice 1. Pour chacun des systèmes suivants

1. $$\begin{cases} x+y+2z+3w &= 13 \\ x-2y+z+w &= 8 \\ 3x+y+z-w &= 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x+y+z-2w &= 1 \\ 3x-2y+z-6w &= -2 \\ x+y-z-w &= -1 \\ 6x+z-9w &= -2 \\ 5x-y+2z-8w &= 3 \end{cases}$$

- Écrire la matrice augmentée correspondante (pour l'ordre des inconnues x, y, z, w).
- Mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
- Déterminer la solution générale du système.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ n'est pas toujours compatible. Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible.

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Exercice 4.

- Les vecteurs $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants ?
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?
- Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^4$?

Exercice 5.(copyright Prof. Abdulle). Calculer $A(\alpha\overrightarrow{v}+\beta\overrightarrow{w})$ où

a)
$$A=\begin{pmatrix}2&1\\4&0\\1&3\end{pmatrix},\quad \alpha=2,\ \beta=3\ \text{ et }\ \overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

b)
$$A=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \alpha=-1,\ \beta=1\ \text{ et }\ \overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$$

Exercice 6.

1. Les colonnes de la matrice
$$M=\begin{pmatrix}1&3&-2&0\\3&10&-7&1\\-5&-5&3&7\end{pmatrix}$$
forment-elles un ensemble de vecteurs linéairement dépendants ?

2. Les polynômes $1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3$ sont-ils linéairement dépendants ?

Exercice 7. Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes

- $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$ et $\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-5\\3\\6\end{bmatrix}$.
- $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \mathbb{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.
- $\mathbf{R}$: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

Exercice 8. (copyright Prof. Abdulle). Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

a. A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

b. A est une matrice 4×2, $A=[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ et $\vec{a}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{a}_1$.

c. A est une matrice 4×3, $A=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3]$. Les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\vec{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

Exercice 9. Faire le Quiz 2 sur moodle, c'est un exemple de question d'examen.

Exercice 10. Choix Multiple.

a. Soit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$$

☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.
☐ Le vecteur $\mathbf{v}_2$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$ pour $h \neq 2$.
☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
☐ Le vecteur $\mathbf{v}_3$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ pour $h = 2$.

b. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

☐ Moins de 5
☐ 7 exactement
☐ 5 exactement
☐ Entre 5 et 7

c. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^5$?

☐ Moins de 5
☐ 7 exactement
☐ 5 exactement
☐ Entre 5 et 7

d. L'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ est

☐ une rotation
☐ une projection orthogonale
☐ une translation
☐ une homothétie

e. Voici quatre affirmations vraies ou fausses, une seule est vraie.

☐ Si les colonnes d'une matrice A de taille $m \times n$ engendrent $\mathbb{R}^m$, alors il y a un pivot dans chaque colonne de la matrice A.
☐ Si la famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ est une famille linéairement indépendante, alors $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est aussi une famille linéairement indépendante.
☐ L'équation homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ admet une solution si et seulement si elle possède (au moins) une inconnue libre.
☐ Les colonnes d'une matrice A de taille $m \times n$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

f. Voici quatre affirmations vraies ou fausses, une seule est vraie.

☐ Le cercle d'équation $(x - 10)^2 + y^2 = 100$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
☐ La demi-droite $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}$.
☐ Le sous-ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient les relations

$$x_1 = x_2, \ x_3 = 2$$

forme un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

☐ Le sous-ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^5$ qui vérifient les relations

$$x_1 = x_2, \ x_3 = 0, \ 10x_4 - 11x_5 = x_3$$

forme un sous-espace de $\mathbb{R}^5$.