EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 2**
INFORMATIQUE	le 20 septembre 2024

Exercice 1.

(a) Résoudre le système suivant en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée correspondante :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12, \\ x_3 + 2x_1 - 4x_2 &= -1, \\ x_2 + 2x_3 - 4x_1 &= -8. \end{cases}$$

(b) Mettre la matrice suivante sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. (a) Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?
2. Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

(b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 3. Pour chacun des deux systèmes linéaires

$$\begin{cases} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -3x + hy &= 1 \\ 6x + ky &= -3 \end{cases}$$

déterminer les valeurs de h et k telles que le système

— ne possède pas de solution,
— possède une solution unique,
— possède une infinité de solutions.

Exercice 4. On travaille dans un espace vectoriel V. Décrire explicitement le sous-espace $\mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k)$ dans les cas suivants.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $V = \mathbb{P}^3$, $\mathbf{v}_1 = t$, $\mathbf{v}_2 = t^2$, $\mathbf{v}_3 = t^3$.

Exercice 5.

1. Déterminer si chacun des ensembles suivants est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
   (a) L'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $3x - 7y = z$.
   (b) L'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^2 - z^2 = 0$.
   (c) L'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = x + y - z = 0$.
   (d) L'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z(x^2 + y^2) = 0$.
   (e) Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé. L'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x+y+r = 0$ et $x+3rz = 0$.
2. Soit $\mathbb{P}_9$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 9. Déterminer si chacun des ensembles suivants est un sous-espace de $\mathbb{P}_9$.
   (a) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t) = at^2$ où a est un réel quelconque.
   (b) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t) = a + t^2$ où a est un réel quelconque.
   (c) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t) = c_1t^3 + c_2t^2 + c_3t + c_4$, où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des entiers naturels.
   (d) L'ensemble des polynômes dans $\mathbb{P}_9$ vérifiant $p(0) = 0$.

Exercice 6. Union et intersection. Soit V un espace vectoriel et U, W des sous-espaces de V.

1. Montrer que l'intersection $U \cap W$ est encore un sous-espace de V.
2. Montrer qu'en général la réunion $U \cup W$ n'est pas un un sous-espace de V (donner un contre-exemple explicite, par exemple dans l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^2$).
3. On pose $U + W = \{u + w \,|\, u \in U, w \in W\}$. Autrement dit $U + W$ est constitué de tous les vecteurs qui sont sommes d'un vecteur de U et d'un vecteur de W. Montrer que $U + W$ est un sous-espace de V.
4. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on définit les sous-espaces $U = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}\}$ et $W = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{w}\}$. Décrire $U \cup W$ et $U + W$.

Remarque. En fait $U + W$ est le plus petit sous-espace qui contient $U \cup W$.

Exercice 7. Six Questions à Choix Multiple. Justifier les réponses !

a. Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- ☐ la première,
- ☐ la deuxième,
- ☐ la troisième,
- ☐ la quatrième.

b. Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrices augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right]$$

- ☐ $h = 5$,
- ☐ $h = 5/2$,
- ☐ $h \neq 5/2$,
- ☐ $h = -5/2$.

c. Même question pour la matrice :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 1 \\ h & 2 & 1 \end{array}\right].$$

- ☐ si $h = \pm\sqrt{2}$,
- ☐ si $h = 1$,
- ☐ si $h \neq \pm\sqrt{2}$,
- ☐ $h \neq 1$.

d.
- ☐ Deux matrices qui sont équivalentes selon les lignes ont le même nombre de colonnes.
- ☐ Deux matrices sont équivalentes selon les lignes si elles ont le même nombre de lignes.
- ☐ Deux matrices peuvent être équivalentes selon les lignes mêmes si elles n'ont pas le même nombre de lignes.
- ☐ Deux matrices peuvent être équivalentes selon les lignes mêmes si elles n'ont pas le même nombre de colonnes.

e. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

- ☐ Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice A n'est pas compatible.
- ☐ Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice A est compatible.
- ☐ Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible.
- ☐ Un système d'équations linéaires inhomogène est toujours compatible.

f.
- ☐ Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.
- ☐ Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.
- ☐ Si la matrice des coefficients d'un système de trois équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est incompatible.
- ☐ Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à trois inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

Exercice 8. Choix Multiple. Faire le Quiz 1 sur moodle, c'est un exemple de question d'examen.