EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 1**
INFORMATIQUE	le 13 septembre 2024

Exercice 1. Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 x_4$

b) $x + y + z = x + y + z$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

d) $x + (\frac{1}{\pi} - \sqrt{7})y - z = 0{,}001$

Exercice 2. Les opérations suivantes sont-elles valides pour résoudre un système d'équations ?

a) $\begin{array}{rl} x - y & = 1 \\ -x + y & = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow \quad L_1 + L_2 \\ \rightsquigarrow \quad L_2 + L_1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} 3x + 2y & = 4 \\ 3x + 2y & = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow \quad L_1 - L_2 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 = 0 \\ 3x + 2y = 4 \end{array}$

c) $\begin{array}{rl} 3x + 2y & = 4 \\ 3x + 2y & = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow \quad L_1 \cdot 0 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 = 0 \\ 3x + 2y = 4 \end{array}$

Exercice 3. On considère l'équation $ax + by = 2$.

a) Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les solutions lorsque $a = 2$ et $b = -1$.

b) Même question pour $a = 1$ et $b = 2$.

c) Estimer géométriquement la solution du système

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

sur l'illustration des points a) et b), puis résoudre le système.

Exercice 4. A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} w + 2x - y & = 4 \\ -y + x & = 3 \\ w + 3x - 2y & = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x & = 7 \end{array} \right.$$

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\left\{ \begin{array}{rl} ax + (1-a)y + (1-a)z & = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z & = a - a^2 \\ x + y + z & = 1 - a \end{array} \right.$$

a) n'admet aucune solution,

b) admet une infinité de solutions,

c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas (b) et (c).

Exercice 6. Soit x, y, z des inconnues. On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x + \cos y + 2\cos z &= 3 \\ 2\cos x - 2\sqrt{2}\cos y + 2\cos z &= 1 - \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y - \sqrt{2}\cos z &= 1 \end{cases}$$

En posant $X = \cos x$, $Y = \cos y$ et $Z = \cos z$, et en substituant dans le système original, on obtient un système d'équations linéaires aux inconnues X, Y et Z. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre ce système et ensuite en déduire les valeurs de x, y et z dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ qui satisfont au système initial.

Exercice 7. Choix Multiple.

a. Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} ax + y &= 1 \\ (a^2+1)x + 2ay &= -2 \end{cases}$$

- ☐ possède une solution unique lorsque $a \neq 1$
- ☐ possède une solution lorsque $a \neq \pm 1$
- ☐ possède une infinité de solutions lorsque $a = 1$
- ☐ possède une solution unique lorsque $a = 1$

b. Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 2y + 2z &= 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z &= 1 \\ 4x + 4ay + 2z &= 1 + 2a \end{cases}$$

- ☐ possède une solution unique lorsque $a = 1/2$
- ☐ ne possède aucune solution lorsque $a \neq 1/2$
- ☐ possède une infinité de solutions lorsque $a = 1/2$
- ☐ ne possède aucune solution lorsque $a = 1/2$

c.
- ☐ Un système d'équations linéaires avec trois équations à 5 inconnues admet au moins une solution.
- ☐ Un système d'équations linéaires avec cinq équations à 3 inconnues n'admet aucune solution.
- ☐ Un système d'équations linéaires homogènes avec trois équations à 2 inconnues n'admet aucune solution.
- ☐ Un système d'équations linéaires homogènes avec une seule équation à 3 inconnues admet au moins une solution.

d.
- ☐ L'équation $\sqrt{2}x + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues.
- ☐ L'équation $2\sqrt{x} + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues.
- ☐ L'équation $\cos x = 0$ est une équation linéaire à une inconnue.
- ☐ L'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une équation linéaire à deux inconnues.