EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 13**
Informatique	le 13 décembre 2025

Exercice 1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont vecteurs propres de A.
2. Diagonaliser orthogonalement la matrice A.
3. En déduire une décomposition spectrale de A.

Exercice 2. Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ une base d'un sous-espace W de $\mathbb{R}^4$, avec

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Construire une base orthogonale de W en utilisant la méthode de Gram-Schmidt.
2. Calculer la distance du vecteur $\vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ à W.

Exercice 3. Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les colonnes de A forment une famille orthogonale de $\mathbb{R}^4$.
2. Construire la matrice U formée en normalisant les vecteurs colonnes de A.
3. Trouver le point le plus proche du point de coordonnées $(1; 1; 1; 1)$ dans l'hyperplan $\mathrm{Im}(U)$.
4. Trouver la distance de $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à $\mathrm{Im}(U)$.

Exercice 4. Question d'examen théorique. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $A = \vec{u}\,\vec{u}^T$.

1. (1 point) Montrer que $\vec{u}$ est un vecteur propre de A.
2. (1 point) Calculer la dimension du noyau de A, (justifier chaque affirmation !).

3. (1 point) Identifier le noyau de A comme un certain sous-espace orthogonal.
4. (1 point) Conclure des trois points ci-dessus que A est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Vect}\{\overrightarrow{u}\}$.

Exercice 5. Question d'examen à développer.
(a) (4 points) On considère le sous-espace W de $\mathbb{R}^4$ donné par l'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ forment une base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3\right)$ de W. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour construire une base orthogonale de W.

(b) (3 points) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(c) (3 points) Calculer une base orthonormée de chaque espace propre de la matrice A.

(d) (2 points) Construire une base $\mathcal{C}$ et une matrice orthogonale de changement de base $U = (\text{Id})_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}an}$ qui permet de diagonaliser A.

(e) (2 points) Donner la formule de changement de base et la forme diagonale de la matrice congruente à A pour le changement de base du point (d).

Exercice 6 (comme une question d'examen à développer).
Soit $\mathbb{F}_5$ le corps à cinq éléments et $\mathbb{F}_5[t]$ l'anneau des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients dans $\mathbb{F}_5$. Soit encore $p(t) = t^2 + t + 1$ et A la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_5)$.

1. (1 point) Montrer que $p(t)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[t]$.
2. (2 points) Soit $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5[t]/(p(t))$, le corps à 25 éléments des restes de la division polynomiale par $p(t)$. Soit $\alpha = [t]$ la classe de t dans $\mathbb{F}_{25}$. Décomposer $p(t)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_{25}[t]$.
3. (1 point) Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $M_{2\times 2}(\mathbb{F}_5)$.
4. (2 points) Montrer que A est diagonalisable dans $M_{2\times 2}(\mathbb{F}_{25})$. On demande les valeurs propres, la dimension des espaces propres avec une justification (mais on de demande pas de base explicite) et la forme diagonalisée.

Exercice 7. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Trouver la solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.
2. Trouver l'erreur correspondante.

Exercice 8. Droite de régression. On considère les cinq points du plan $(2,6), (3,6), (5,11), (1,2)$ et $(4,10)$. Calculez la droite de régression linéaire pour ces points.

Exercice 9.

a) Vérifier que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthogonale de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par rapport au produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, \text{ pour } A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

b) Calculer ensuite les coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) du vecteur $v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 10.

a) Trouver tous les carrés dans $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_5$.

b) Trouver un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_3[t]$ de la forme $t^2 - a$, avec $a \in \mathbb{F}_3$.

c) Montrer que $t^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[t]$.

d) Construire un corps de cardinalité 9. (*Indication : utiliser le polynôme trouvé en b).)* Si α désigne la classe de t dans ce corps, calculer toutes les puissances de α.

e) Construire un corps de cardinalité 25. (*Indication : utiliser le polynôme $t^2 - 2$ de $\mathbb{F}_5[t]$.)* Si α désigne la classe de t dans ce corps, calculer toutes les puissances de α.

Exercice 11. Le but de l'exercice est de diagonaliser la matrice suivante dans $M_{3\times 3}(\mathbb{F}_3)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour faire les calculs, vous pouvez suivre les indications suivantes :

a) Calculer le noyau de A sur $\mathbb{F}_3$ et vérifier qu'il est de dimension 2.

b) Vérifier que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont fixés par A. et que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est renversé par A.

c) Déduire des points précédents quel est le polynôme caractéristique de A.

d) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{F}_3)^5$ formée de vecteurs propres de A et la matrice D semblable à A correspondante.

e) A l'aide la formule de changement de base, mais sans calculer les matrices de changement de base !, calculer A^3. *(Indication : calculer D^3.)*

Exercice 12. Choix multiples.

a. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ Le noyau de A est non nul.
☐ La matrice A est orthodiagonalisable.
☐ La matrice A représente une application linéaire qui transforme la base canonique en une nouvelle base orthogonale, mais pas orthonormée.
☐ La matrice A représente une application linéaire qui transforme la base canonique en une nouvelle base orthonormée.

b. Soit A la matrice du point a. Laquelle des affirmations suivantes est fausse ?

☐ Le nombre 6 est valeur propre de A.

☐ La matrice A représente une application linéaire qui transforme le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix}$.
☐ Le polynôme caractéristique de A est scindé.
☐ Les valeurs propres de A sont des nombres entiers.

c. Le procédé de Gram-Schmidt

☐ transforme toute base de $\mathbb{R}^3$ en la base canonique.
☐ transforme les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ en une base orthogonale d'un plan.
☐ transforme une base du plan d'équation $x+y+z=0$ en une base orthogonale de ce même plan.
☐ transforme une base du plan d'équation $x+y+z=0$ en une base orthonormée de ce même plan.

d. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors la solution $\hat{x}$ au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ satisfait

☐ $\hat{x}_1 = 0$
☐ $\hat{x}_2 = 4/3$
☐ $\hat{x}_1 = 4/3$
☐ $\hat{x}_2 = 1/3$

e. Soit $A, P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, avec P orthogonale, telles que $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

☐ A est diagonalisable, mais pas orthodiagonalisable.
☐ A est symétrique.
☐ A est orthodiagonalisable.
☐ A est orthogonale.