Exercice 1.

(a) Montrer que la matrice de rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un réel quelconque, est orthogonale. Calculer $\det R$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

(b) Montrer que la matrice de réflexion

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est orthogonale. Calculer $\det U$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

(c) Montrer que toute matrice $n \times n$ de la forme $Q = I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire (de longueur 1) de $\mathbb{R}^n$, est orthogonale. Ces matrices sont appelées matrices de réflexion élémentaires. A l'aide d'un raisonnement géométrique, déterminer les valeurs propres et les espaces propres correspondants.

Exercice 2.

(a) Soit la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Calculez F^TF et FF^T. Ces deux matrices sont elles égales ?

(b) Soit la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 20 & 12 \\ -12 & 15 & -16 \\ -20 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Montrer que les colonnes de B forment un ensemble orthogonal.

(c) Calculer B^TB, et en déduire B^TBB^T. En multipliant cette matrice à gauche par $(B^T)^{-1}$ montrer que $BB^T = B^TB$.

(d) Soit U la matrice obtenue en normalisant les colonnes de B (c'est-à-dire que chaque colonne $\overrightarrow{u}_i$ de U est colinéaire à la colonne $\overrightarrow{b}_i$ de B, et de norme 1). Sans calculer U, trouver U^TU et UU^T.

Exercice 3.

(a) Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que les colonnes de A forment une famille orthogonale.

(b) Soit U la matrice obtenue en normalisant les colonnes de A. Les matrices U^TU et UU^T sont-elles diagonales ?

(c) On pose $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{p} = UU^T\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/9 \\ -13/9 \\ -5/9 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{y} - \overrightarrow{p}$. Expliquer pourquoi $\overrightarrow{p}$ est un élément de $\operatorname{Im} A$ et vérifier que $\overrightarrow{z}$ est orthogonal à $\overrightarrow{p}$ ainsi qu'à chaque colonne de A. En déduire que $\overrightarrow{z}$ est dans $(\operatorname{Im} A)^\perp$.

(d) La norme du vecteur $\overrightarrow{z}$ correspond géométriquement à la distance entre $\overrightarrow{y}$ et $\operatorname{Im} A$. Calculer cette distance.

Exercice 4. Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'ensemble $W^\perp$ de tous les vecteurs orthogonaux à W est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $W \cap W^\perp = \{0\}$.
3. Montrer que $\dim W + \dim W^\perp = n$. On dit que la somme $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$ est directe et on note $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$.

Exercice 5. (copyright Prof. Abdulle)

Soient $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont orthogonaux.
2. Calculer la projection orthogonale $\operatorname{proj}_W(\overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{v}$ sur le sous-espace $W = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$.
3. Donner la décomposition $\overrightarrow{v} = \hat{v} + \overrightarrow{z}$ où $\hat{v} \in W$ et $\overrightarrow{z} \in W^\perp$.
4. Calculer la distance $d(\overrightarrow{v}, W)$ entre $\overrightarrow{v}$ et le plan W.

Exercice 6. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

1. Prouver que chaque vecteur $\overrightarrow{x}$ dans $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{u}$, où $\overrightarrow{p}$ est dans le sous-espace $\operatorname{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A et $\overrightarrow{u}$ est dans $\operatorname{Ker}(A)$.
2. Montrer que si l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est consistante, alors il y a un unique vecteur $\overrightarrow{p}$ dans $\operatorname{Lgn}(A)$ tels que $A\overrightarrow{p} = \overrightarrow{b}$.

Exercice 7. Matrices orthogonales.

1. Montrer que si U est une matrice orthogonale, alors la transposée U^T est aussi une matrice orthogonale. Autrement dit si les colonnes de U sont orthonormées, alors les lignes de U sont orthonormées.
2. Montrer que si U et V sont des matrices orthogonales de taille $n \times n$, alors le produit UV est aussi une matrice orthogonale.
3. Si U est orthogonale et λ est une valeur propre réelle de U, montrer que $\lambda = \pm 1$.
4. Soit $U = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 36 & 48 & -80 \\ -80 & 60 & 0 \\ 48 & 64 & 60 \end{pmatrix}$. Montrer que U est orthogonale et que 1 est valeur propre. Quelle est la dimension de l'espace propre E_1 ?

   Remarque. La valeur -1 n'est pas valeur propre de U. En diagonalisant U sur $\mathbb{C}$, ou en complétant la base de E_1 par le choix d'une base de $E_1^\perp$ on verrait que U est la matrice d'une rotation d'axe E_1.

5. Soit U une matrices orthogonale de taille $n \times n$ et soit $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $(U\overrightarrow{u}_1, \ldots, U\overrightarrow{u}_n)$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Soient $v_1 = (1, 0, 1, 2), v_2 = (0, 1, 0, 1), v_3 = (2, 2, 2, 1), v_4 = (1, 1, 1, -2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et $W \subseteq \mathbb{R}^4$ l'espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, v_4.

a) Calculer $W^\perp$.
b) Pour $v \in W^\perp$, trouver $\mathrm{proj}_W v$.
c) Pour $v' = (2, -1, 2, 3)$, trouver $\mathrm{proj}_W v'$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$. Calculer la décomposition QR de A.

Exercice 10. Une étude sur les habitudes des étudiants montre que le premier jour sur le campus, 50% des étudiants boivent un café et 50% ne le font pas. On observe aussi que 80% des étudiants qui ont bu un café en reprennent un le jour suivant, alors que 60% de ceux qui n'en ont pas bu en prennent un le jour suivant. Déterminer une formule donnant la proportion de buveurs de café après k jours. A la longue, combien de buveurs de café parmi tous les étudiants les cafétérias peuvent-elles prévoir chaque jour ? Ce résultat dépend-il des conditions initiales ?

Exercice 11. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A sur $\mathbb{F}_3$. Déterminer si A est diagonalisable sur $\mathbb{F}_3$. Si oui, donner les matrices P et D telles que $P^{-1}AP = D$, avec D diagonale.

2) Calculer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice B sur $\mathbb{F}_5$. Déterminer si B est diagonalisable sur $\mathbb{F}_5$. Si oui, donner les matrices Q et E telles que $Q^{-1}BQ = E$, avec E diagonale.

Exercice 12. Choix Multiple.

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ Alors les lignes de A sont orthogonales.
☐ Alors les colonnes de A sont orthonormées.
☐ Alors $A^T A$ est une matrice diagonale.
☐ Alors AA^T est une matrice diagonale.

b. Soit A la matrice du point a. Alors l'équation du plan engendré par les deux premières colonnes de A est

☐ $x + 2y + 3z = 0$.
☐ $-3x + z = 0$.
☐ $x - 5y + 3z = 0$.
☐ $-2x + 2y + 4z = 0$.

c. Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^7$ de dimension 4 et $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ l'application qui envoie un vecteur de $\mathbb{R}^7$ sur sa projection orthogonale dans W.

☐ L'image par T d'un vecteur de $W^\perp$ est l'opposé de ce vecteur.
☐ L'application T est linéaire.
☐ L'application T est injective.
☐ L'application T est surjective.

d. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ dont les colonnes sont non nulles.

☐ Si les colonnes de A sont orthogonales, alors les lignes aussi.
☐ Si les colonnes de A sont orthogonales, alors $\mathrm{Ker} A$ est nul.
☐ Si les lignes de A sont orthonormées, alors A est la matrice I_n.
☐ Si l'image de A est $\mathbb{R}^n$, alors les lignes de A sont orthogonales.