EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 11**
INFORMATIQUE	le 29 novembre 2025

Exercice 1. Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = (S_1, S_2, S_3)$ où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.

b) Trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = (M_1, M_2, M_3)$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

c) Ecrire la matrice $(T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$.

(b) Calculer la distance entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(c) Trouver une base de l'espace orthogonal au plan engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice 3. Soit les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Montrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

(b) Exprimer le vecteur

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Exercice 4.

a) Soit $P(X) = X^3 + X + 1$ et $Q(X) = X^2 + 1$ deux polynômes de $\mathbb{F}_2[X]$. Calculer la somme et le produit de P et Q.

b) Soient $P(X) = X^3 + 2X + 3$ et $Q(X) = 4X^2 + 1$ deux polynômes de $\mathbb{F}_5[X]$. Calculer la somme et le produit de P et Q.

Exercice 5. Soit K un corps.

Définition. *Un polynôme $P(X)$ sur K est dit **irréductible** s'il n'est pas constant et si aucun polynôme de degré ≥ 1 ne le divise (à part les multiples de lui-même, i.e. les polynômes de la forme $c \cdot P(X)$ avec $c \in K$). Chaque polynôme se décompose en facteurs de polynômes irréductibles.*

a) Montrer qu'un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible sur K si et seulement s'il n'admet pas de racine dans K.

b) Déterminer tous les polynômes unitaires (i.e. la constante devant le plus grand facteur de X vaut 1) irréductibles de degré ≤ 3 dans $\mathbb{F}_2[X]$ et $\mathbb{F}_3[X]$.

c) Vérifier que le polynôme $X^4 + 1$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{F}_3$. Est-il irréductible sur ce corps ?

d)* Montrer qu'un polynôme de degré 4 ou 5 est irréductible sur $\mathbb{F}_2$ si et seulement s'il n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2$ et il n'est pas divisible par $X^2 + X + 1$. Etudier l'irréductibilité du polynôme $X^5 + X^2 + 1$ sur $\mathbb{F}_2$.

Exercice 6.

a) Montrer que $X + 2$ divise $X^3 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{F}_3[X]$.

b) Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^5 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.

c) Réaliser dans $\mathbb{F}_5[X]$ la division euclidienne de $X^5 + X^4 + X^3 + 4X^2 + 3$ par $X^3 + 3X^2 + X + 2$.

d) Réaliser dans $\mathbb{F}_3[X]$ la division euclidienne de $X^3 + 2X + 2$ par $X^2 + X + 2$.

Exercice 7. Soit $P(X) = X^4 - 10X^3 + 21X^2 - 10X + 11$. Décomposer P en facteurs irréductibles modulo $2, 3, 5$.

Exercice 8. Soient A, B et C les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice, déterminer les polynômes caractéristiques, valeurs propres, ainsi que les espaces propres associés dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_2$ respectivement. Pour chaque matrice A, B et C, indiquer si elles sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_2$ respectivement.

Exercice 9.

1. Décrire à similitude près toutes les matrices dont le polynôme caractéristique est $(t-2)(t+2)$.
2. Même question avec le polynôme t^2. On remarquera d'abord que si $c_A(t) = t^2$, une valeur propre de A nous est donnée. On choisira un vecteur propre que l'on complètera en une base $\mathcal{B}$. La matrice A est alors semblable à une matrice plus jolie, celle de la même application linéaire exprimée dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 10. Soit A une matrice de taille 4×4 telle que $A^{10} = 0$.

1. Montrer que 0 est valeur propre de A (il pourra être agréable de considérer le plus grand entier k tel que A^k n'est pas la matrice nulle).
2. Montrer que 0 est la seule valeur propre de A (un raisonnement par l'absurde fonctionne bien).
3. En déduire le polynôme caractéristique de A.
4. Trouver pour tout $1 \leq k \leq 4$ une matrice triangulaire A telle que $A^k = 0$ et $\dim E_0 = 5 - k$.

Exercice 11. On définit une suite $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^3$ par récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 3 \\ z_0 = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 3y_n \\ z_{n+1} = 2x_n - 4y_n + 2z_n \end{cases} \quad \text{, pour tout } n \geq 0.$$

1. Trouver une matrice A telle que $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 0$. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle A est diagonale et calculer la matrice de changement de base S et son inverse S^{-1}. On note $D = S^{-1}AS$ la matrice diagonale correspondante.
2. Montrer que $A^n = SD^nS^{-1}$ pour tout $n \geq 0$.
3. Trouver une formule pour exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ en fonction du vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et calculer explicitement ses coordonnées en fonction de n, pour tout $n \geq 0$.

Exercice 12. Choix Multiple.

a. Soit A une matrice de taille 3×3 avec $c_A(t) = (t-1)^2(t+1)$.

- ☐ Alors A est toujours diagonalisable.
- ☐ Alors A a pour valeurs propres 1 et -1.
- ☐ Alors A n'est jamais diagonalisable.
- ☐ Alors A est la matrice d'une symétrie par rapport à un plan.

b. L'**ordre** d'un élément $0 \neq x \in \mathbb{F}_7$ est le plus petit entier n tel que $x^n = 1$. Par exemple, l'ordre de 1 est toujours 1.

- ☐ L'ordre de 3 dans $\mathbb{F}_7$ vaut 2.
- ☐ L'ordre de 4 dans $\mathbb{F}_7$ vaut 6.
- ☐ L'ordre de 5 dans $\mathbb{F}_7$ vaut 6.
- ☐ L'ordre de 6 dans $\mathbb{F}_7$ vaut 3.

c. Un **carré** dans $\mathbb{F}_7$ est un élément $x \in \mathbb{F}_7$ tel qu'il existe $y \in \mathbb{F}_7$ avec $x = y^2$.

- ☐ Tous les éléments de $\mathbb{F}_7$ sont des carrés.
- ☐ Seuls 0, 1 et 4 sont des carrés dans $\mathbb{F}_7$.
- ☐ Seuls 0, 1, 2 et 4 sont des carrés dans $\mathbb{F}_7$.
- ☐ Seuls 3 et 6 ne sont pas des carrés dans $\mathbb{F}_7$.