EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Série 10**
Informatique	le 22 novembre 2024

Exercice 1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les polynômes caractéristiques des matrices A et B, leurs valeurs propres, ainsi que les espaces propres associés.

Exercice 2. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Trouver pour chaque matrice les valeurs propres et les espaces propres correspondants.
- Dites lesquelles sont diagonalisables.

Exercice 3. Soit la transformation linéaire $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ définie par

$$T(a + bt) = (7a + 2b) + (b - 4a)t$$

pour tout polynôme $a + bt$. Calculer la matrice de T par rapport à la base canonique $(1, t)$ de $\mathbb{P}_1$. Trouver ensuite une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_1$ telle que la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de T relative à la base $\mathcal{B}$ soit diagonale.

Exercice 4. Soit A une matrice carrée.

1. Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres (en calculant leurs polynômes caractéristiques).
2. On suppose que la somme des éléments de chaque colonne est égale à un même nombre c. Montrer que c est une valeur propre de A (en utilisant la partie 1 de cet exercice et un exercice de la série précédente).
3. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer sans faire de calculs que 3 est valeur propre de A puis calculer l'espace propre E_3.

   Remarque. Ce dernier calcul montre que même si A et A^T ont les mêmes valeurs propres on ne peut pas comparer en revanche les espaces propres.

Exercice 5. On travaille dans le corps $\mathbb{F}_2$ à deux éléments : 0, 1.

a) Donner toutes les matrices inversibles dans $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$.

b) Montrer que, si une de ces matrices admet une valeur propre, alors cette valeur propre vaut 1.

c) Calculer l'espace propre E_1 de chacune de ces matrices, lorsque 1 est une valeur propre.

Exercice 6. Sans poser d'équations, en utilisant les propriétés géométriques des applications décrites, trouver au moins une valeur propre de T et décrire l'espace propre correspondant dans les cas suivants :

1. T est la rotation dans $\mathbb{R}^3$ dont l'axe est la droite $x = y = z$.
2. T est une symétrie dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe $y = 2x$.
3. T est une symétrie centrale dans $\mathbb{R}^2$ autour de l'origine.
4. T est une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.
5. T est une homothétie dans $\mathbb{R}^2$ de centre $(0; 0)$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Exercice 7. Supposons que le polynôme caractéristique d'une matrice A soit de la forme

$$p_A(x) = (x-1)(x-3)^2(x-4)^3.$$

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

b) Que peut-on dire de la dimension des espaces propres de A ?

c) Que peut-on dire de la dimension des espaces propres de A si on sait de plus que A est diagonalisable ? On se souviendra ici qu'une matrice $n \times n$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres.

d) Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants appartenant au même espace propre de A, que peut-on dire sur la valeur propre ?

Exercice 8.
Soit T la symétrie d'axe $x = 2y$ dans $\mathbb{R}^2$.

a. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ de sorte que la matrice $D = (T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ soit une matrice diagonale.

b. Calculer les matrices de changements de base $S = (\mathrm{Id})^{\mathcal{C}an}_{\mathcal{B}}$ et $S^{-1} = (\mathrm{Id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}an}$.

c. A l'aide de la formule de changement de base, trouver la matrice $A = (T)^{\mathcal{C}an}_{\mathcal{C}an}$.

d. Calculer le déterminant de A et toutes les puissances A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9. Choix Multiple.

a. Soit A une matrice de taille 3×3 telle que $A^3 = I_3$. Parmi les affirmations suivantes laquelle est toujours vraie ?

☐ Alors dim Ker$A = 1$ et 0 est valeur propre de A.

☐ Alors dim Ker$A = 0$ et 0 est valeur propre de A.

☐ Alors dim Ker$A = 0$, mais 0 n'est pas valeur propre de A.

☐ Alors 2 est une valeur propre de A.

b. Soit A une matrice de taille 2×2.

☐ Si A est triangulaire, alors A n'est pas toujours diagonalisable.

☐ Si A n'est pas triangulaire, alors A n'est pas diagonalisable.

☐ La matrice A est toujours semblable à une matrice triangulaire (supérieure).

☐ Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

c. Soit A une matrice de taille 11×11 dont 11 est valeur propre.

☐ Alors 11 est valeur propre de A^{-1}.

☐ Alors 11 est valeur propre de A^2.

☐ Alors 121 est valeur propre de A^2.

☐ Alors 10 est valeur propre de la matrice A_{11} de taille 10×10 obtenue de A en supprimant la première ligne et la première colonne.

d. Soit A une matrice 3×3 diagonalisable, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de vecteurs propres de A avec valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3. Soit $S = (v_1, v_2, v_3)$ la matrice de changement de base et D la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Alors

☐ $D = SAS^{-1}$.

☐ $D = SAS^T$.

☐ $D = S^{-1}AS$.

☐ $D = S^TAS$.

Et dans le même ordre idée que la QCM c. ci-dessus, regardez aussi dans le livre de Lay, l'exercice 1 page 353.