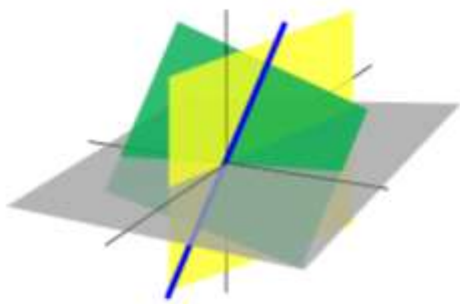
cours18

mercredi, 13 novembre 2024 18:39

Algèbre Linéaire

Cours du 14 novembre

Jérôme Scherer



5.1.1 Rappels sur les espaces propres

On traite le cas d'une application linéaire $T : V \to V$ (aussi appelé endomorphisme car la source et le but de T coïncident).

Définition

Un vecteur non nul x de V est un vecteur propre de T s'il existe un nombre réel λ tel que $T(x) = \lambda x$. On appelle alors λ une valeur propre de T.

L'espace propre E_λ est par définition l'ensemble de tous les vecteurs x de V ayant la propriété que $T(x) = \lambda x$. Il s'agit donc de l'ensemble de tous les vecteurs propres et du vecteur nul.

Proposition

Si λ est une valeur propre, l'espace propre E_λ est le sous-espace $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$.

5.1.3 Valeurs propres et noyaux

Remarque

Chercher une valeur propre λ de la matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ revient à chercher un nombre λ tel que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension ≥ 1. Par le Théorème du rang, ceci revient à chercher λ avec $\mathrm{rang}(A - \lambda I_n) < n$, ou encore $A - \lambda I_n$ non inversible.

Exemple. La matrice de rotation $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Le nombre λ est valeur propre de R_α si et seulement si:

$R_\alpha - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, c'est à dire son déterminant $(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin\alpha^2 = \cos\alpha^2 - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 + \sin\alpha^2$

$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$

5.1.3 Exemple, suite

$\Delta = 4\cos\alpha^2 - 4 \leq 0$

Cas 1: si $\cos(\alpha) = \pm 1$, $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ et $\Delta = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ si $\alpha = 0$ $\qquad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ si $\alpha = \pi$ $\qquad R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Cas 2: si $\cos\alpha \neq \pm 1$ $\quad \Delta < 0$

$\lambda = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$

Conclusion: dans les deux cas, il y a deux valeurs propres, parfois complexes, parfois double.

5.1.1 Exemple : les rotations

Soit $0 \leq \alpha < 2\pi$ et $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ la matrice de la rotation centré en $(0;0)$ et d'angle α.

Proposition

Le nombre λ est une valeur propre de R_α si et seulement si la matrice $R_\alpha - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$.

1. Si $\alpha \in \{0, \pi\}$, alors $R_\alpha = I_2$ ou $-I_2$;
2. Si $\alpha \neq 0, \pi$, alors le discriminant $\Delta < 0$, il n'existe donc aucun nombre réel λ qui est valeur propre de R_α ; il n'y a pas de valeur propre réelle, mais deux valeurs propres complexes.

5.1.4 La valeur propre nulle

Un vecteur propre doit être non nul, mais zéro peut être une valeur propre.

5.1.4 La valeur propre nulle

Un vecteur propre doit être non nul, mais zéro peut être une valeur propre.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre puisque

5.1.4 La valeur propre nulle

Un vecteur propre doit être non nul, mais zéro peut être une valeur propre.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

Zéro est valeur propre de $A \iff \mathrm{Ker} A \neq \{\vec{0}\}$ $\iff \exists \vec{x} \neq 0$ tq $A\vec{x} = 0\vec{x}$

5.1.4 La valeur propre nulle

Un vecteur propre doit être non nul, mais zéro peut être une valeur propre.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

Zéro est valeur propre de $A \iff \mathrm{Ker} A \neq \{\overrightarrow{0}\}$
$\iff \mathrm{rang} A < n$

5.1.4 La valeur propre nulle

Un vecteur propre doit être non nul, mais zéro peut être une valeur propre.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

Zéro est valeur propre de $A \iff \mathrm{Ker} A \neq \{\overrightarrow{0}\}$
$\iff \mathrm{rang} A < n \iff A$ n'est pas inversible.

5.1.5 Matrices triangulaires

Proposition

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les coefficients diagonaux.

Le plus parlant est de traiter un exemple !

5.1.5 Matrices triangulaires

Proposition

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les coefficients diagonaux.

Le plus parlant est de traiter un exemple !

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 & 11 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Le rang de cette matrice nous donne une indication sur une valeur propre évidente !

5.1.5 Exemple

① $\operatorname{rang} A = 3 < 4$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ par le théorème du rang, 0 est valeur propre et $E_0 = \operatorname{Ker} A$.

② 12 est valeur propre de A, car la $4^{\text{ème}}$ ligne de $A - 12I_4$, donc $\operatorname{rang}(A - 12I_4) = 3$, ici

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - 12I_4)) = 1 = \dim E_{12}.$$

③ -5 est valeur propre,

$$A - (-5)\cdot I_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$ est de rang 3

$E_{-5} = \operatorname{Ker}(A - (-5)I_4)$ est de dim. 1.

⚠ -5 apparaît deux fois dans la diagonale, c'est une valeur propre "double". Mais $\dim E_{-5} = 1$

5.1.5 Vecteurs propres libres, les cas $n = 1, 2$

- Soit $\vec{v}_1$ un vecteur propre de la matrice carrée A. Alors la famille $\{\vec{v}_1\}$ est libre car un vecteur propre est non nul.

5.1.5 Vecteurs propres libres, les cas $n = 1, 2$

1. Soit $\vec{v}_1$ un vecteur propre de la matrice carrée A. Alors la famille $\{\vec{v}_1\}$ est libre car un vecteur propre est non nul.
2. Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ deux vecteurs propres de la matrice carrée A pour des valeurs propres λ_1 et λ_2 différentes. Alors la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre.

① $A \cdot \vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1}$ $\quad A\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2}$.

Si $a\vec{v_1} + b\vec{v_2} = \vec{0}$. Alors

$A(a\vec{v_1} + b\vec{v_2}) = \vec{0}$

$\parallel$

$a \cdot \lambda_1 \cdot \vec{v_1} + b \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v_2}$

$= \lambda_1 \cdot \underbrace{(a\vec{v_1} + b\vec{v_2})}_{=0} + b(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \vec{v_2} = \vec{0}$

$\Rightarrow b \cdot \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} = 0$, donc $b = 0$

$\Rightarrow a = 0$.

② Preuve pour $n=2$ seulement

Si $\vec{V_1} = \alpha \cdot \vec{V_2}$ $\quad \downarrow A\cdot$

$A \cdot \vec{v_1} = A \cdot (\alpha \cdot \vec{v_2})$

$\lambda_1 \cdot \vec{v_1} = \alpha \cdot A \cdot \vec{v_2} = \alpha \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v_2}$

$\lambda_1 \cdot \alpha \cdot \vec{v_2} \Leftrightarrow \alpha \cdot \lambda_1 \vec{v_2} = \alpha \cdot \lambda_2 \vec{v_2}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

5.1.5 Vecteurs propres libres

Théorème

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes et $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ des vecteurs propres d'une matrice carrée A (pour chacune de ces valeurs propres). Alors la famille $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ est libre.

5.1.5 Vecteurs propres libres

Théorème

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes et $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ des vecteurs propres d'une matrice carrée A (pour chacune de ces valeurs propres). Alors la famille $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ est libre.

Preuve. Par récurrence sur k. Si $k = 1$ le résultat est évident. Supposons que $k > 1$ et que le résultat est vrai pour moins de k vecteurs. Supposons que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \vec{v}_k = 0$$

5.1.5 Vecteurs propres libres

Théorème

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes et $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ des vecteurs propres d'une matrice carrée A (pour chacune de ces valeurs propres). Alors la famille $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ est libre.

Preuve. Par récurrence sur k. Si $k = 1$ le résultat est évident. Supposons que $k > 1$ et que le résultat est vrai pour moins de k vecteurs. Supposons que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \vec{v}_k = 0$$

Nous devons montrer que tous les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont nuls.

5.1.5 Démonstration, suite

Reprenons : $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \vec{v}_k = 0$. Alors

$$\vec{0} = A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k) = \alpha_1 A \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} A \vec{v}_{k-1} + \alpha_k A \vec{v}_k$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \lambda_k \vec{v}_k = 0$$

Multiplions l'égalité de la première ligne par λ_k :

$$-(\alpha_1 \lambda_k \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_k \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \lambda_k \vec{v}_k) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overbrace{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)}^{=0} \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \vec{v}_{k-1} = \vec{0}}$$

Comme $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ pour $i < k$, on conclut par l'hypothèse de récurrence :

5.1.5 Démonstration, suite

Reprenons : $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \vec{v}_k = 0$. Alors

$$\vec{0} = A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k) = \alpha_1 A \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} A \vec{v}_{k-1} + \alpha_k A \vec{v}_k$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \lambda_k \vec{v}_k = 0$$

Multiplions l'égalité de la première ligne par λ_k :

$$-(\alpha_1 \lambda_k \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_k \vec{v}_{k-1} + \alpha_k \lambda_k \vec{v}_k) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \vec{v}_{k-1} = \vec{0}}$$

Comme $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ pour $i < k$, on conclut par l'hypothèse de récurrence : $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Donc aussi $\alpha_k = 0$. $\square$

5.2.1 Le polynôme caractéristique

Un nombre λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Or une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Théorème

Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$.

Définition

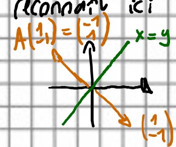
Soit A une matrice $n \times n$. Le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) := \det(A - tI_n)$.

Une valeur propre est une racine de $c_A(t)$. Sa multiplicité en tant que racine est appelée multiplicité algébrique. $C_A(t) = (t-1)^k \cdot p(t)$

5.2.1 Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont ses valeurs propres ?

A transforme $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_2$ en $\vec{e}_1$. On reconnaît ici la symétrie axiale d'axe $x=y$ dans $\mathbb{R}^2$



Si nous arrivons pas à l'observer, calculons algébriquement.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

$$C_A(t) = |A - tI_2| = \left| \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \right| = t^2 - 1 = (t-1)^1 (t+1)^1$$

les racines sont 1 et -1, de multiplicité algébrique 1 chacune.

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{-1} = \mathrm{Ker}(A - (-1)I_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi E_1 est l'axe de symétrie $(x=y)$

E_{-1} est perpendiculaire $(x=-y)$

5.2.1 Exemple, suite

Choisissons $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ comme base de $\mathbb{R}^2$.

Alors si $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tq $(S)_{can}^{can} = A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,

alors, puisque $S(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$, $S(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2$,

$(S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. $\quad S(b_1) = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 \quad S(\vec{b}_2) = 0b_1 + (-1)\cdot b_2$

On voit les valeurs propres dans diagonale, on identifie immédiatement une droite fixée (val. propre 1), et
—— inversée (" " -1).

5.2.1 La multiplicité algébrique

La multiplicité algébrique d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

5.2.1 La multiplicité algébrique

La multiplicité algébrique d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Exemple. Soit $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ et supposons que

1. $c_A(t) = \underbrace{t^3}_{(t-0)^3}(t+3)^2$. Alors   0 est valeur propre de multiplicité alg. 3
   -3 " " " 2.
2. $c_A(t) = \underbrace{(t^2+1)^2}_{((t-i)(t+i))^2}(t-2)^1$. Alors
   i " " " 2
   -i " " " 2
   2 " " " 1

5.2.1 La multiplicité algébrique

La multiplicité algébrique d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Exemple. Soit $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ et supposons que

1. $c_A(t) = t^3(t+3)^2$. Alors
2. $c_A(t) = (t^2+1)^2(t-2)$. Alors

Dans tous les cas il y a autant de valeurs propres, en comptant leur multiplicité algébrique, que de colonnes dans la matrice, ici 5.

5.2.1 La multiplicité algébrique

La multiplicité algébrique d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Exemple. Soit $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ et supposons que

1. $c_A(t) = t^3(t+3)^2$. Alors
2. $c_A(t) = (t^2+1)^2(t-2)$. Alors

Dans tous les cas il y a autant de valeurs propres, en comptant leur multiplicité algébrique, que de colonnes dans la matrice, ici 5.

Définition

La multiplicité géométrique d'une valeur propre λ est la dimension de l'espace propre E_λ.

5.2.2 Matrices semblables

Deux matrices A et B de taille $n \times n$ sont semblables si elles représentent la même application linéaire, mais pour des choix de bases différentes.

5.2.2 Matrices semblables

Deux matrices A et B de taille $n \times n$ sont semblables si elles représentent la même application linéaire, mais pour des choix de bases différentes. Concrètement, si $T : V \to V$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont deux bases de V, alors $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ et $(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ sont semblables.

5.2.2 Matrices semblables

Deux matrices A et B de taille $n \times n$ sont semblables si elles représentent la même application linéaire, mais pour des choix de bases différentes. Concrètement, si $T : V \to V$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont deux bases de V, alors $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ et $(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ sont semblables. Or, si $P = (\mathrm{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est la matrice inversible de changement de base, alors

5.2.2 Matrices semblables

Deux matrices A et B de taille $n \times n$ sont semblables si elles représentent la même application linéaire, mais pour des choix de bases différentes. Concrètement, si $T : V \to V$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont deux bases de V, alors $(T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ et $(T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$ sont semblables. Or, si $P = (\mathrm{Id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ est la matrice inversible de changement de base, alors

$$P^{-1}BP = (\mathrm{Id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

5.2.2 Matrices semblables

Deux matrices A et B de taille $n \times n$ sont semblables si elles représentent la même application linéaire, mais pour des choix de bases différentes. Concrètement, si $T : V \to V$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont deux bases de V, alors $(T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ et $(T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$ sont semblables. Or, si $P = (\mathrm{Id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ est la matrice inversible de changement de base, alors

$$P^{-1}BP = (\mathrm{Id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = (T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = A$$

$P^{-1} \cdot (T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} \cdot P = (T)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ niveau matriciel

$$\begin{tikzcd}
(V,\mathcal{B}) & (V,\mathcal{C}) \arrow[l, "\cdot P^{-1}", "\mathrm{Id}"'] & (V,\mathcal{C}) \arrow[l, "\cdot (T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}", "T"'] & (V,\mathcal{B}) \arrow[l, "\cdot P", "\mathrm{Id}"'] \arrow[lll, bend right, "P^{-1} \cdot (T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} \cdot P"'] \arrow[lll, bend left, "\mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id} = T"]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id} = T$ niveau des applications linéaires

5.2.2 Similitude $\approx$

Définition

Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que

$$\boxed{A = P^{-1}BP}.$$

5.2.2 Similitude $\approx$

Définition

Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que

$$\boxed{A = P^{-1}BP}.$$

Exemple. La symétrie axiale S par rapport à la droite $x = y$. Nous avons vu que

$$A = (S)^{\mathfrak{e}_{an}}_{\mathfrak{e}_{an}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2.2 Similitude $\approx$

Définition

Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que

$$\boxed{A = P^{-1}BP}.$$

Exemple. La symétrie axiale S par rapport à la droite $x = y$. Nous avons vu que

$$A = (S)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = B$$

5.2.2 Similitude $\approx$

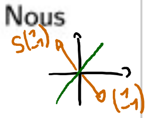
Définition

Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que

$$\boxed{A = P^{-1}BP}.$$

Exemple. La symétrie axiale S par rapport à la droite $x = y$. Nous

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$



avons vu que

$$A = (S)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = B$$

Les matrices de changements de base sont

$$P = (\mathrm{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = (\mathrm{Id})_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2.2 Exemple, suite

On vérifie "à la main" que $P^{-1}AP = B$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

5.2.2 Exemple, suite

On vérifie "à la main" que $P^{-1}AP = B$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2.2 Exemple, suite

On vérifie "à la main" que $P^{-1}AP = B$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

5.2.2 Exemple, suite

On vérifie "à la main" que $P^{-1}AP = B$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2.3 Similitude et valeurs propres

Théorème

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

5.2.3 Similitude et valeurs propres

Théorème

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

Soit A, B deux matrices $n\times n$ semblables. C'est à dire, il existe une matrice inversible P, de taille $n\times n$, telle que $PAP^{-1} = B$.

$$C_B(t) = C_{PAP^{-1}}(t) = \det(PAP^{-1} - tI_n) = \det(PAP^{-1} - t\cdot P\cdot P^{-1})$$
$$= \det(PAP^{-1} - P\cdot tI_n P^{-1}) = \det(P(A - tI_n)P^{-1})$$
$$= \det(P)\cdot\det(A - tI_n)\cdot\det(P^{-1})$$
$$= \frac{\cancel{\det(P)}\cdot\det(A - tI_n)}{\cancel{\det(P)}} = \det(A - tI_n) = C_A(t).$$

5.2.3 Similitude et valeurs propres

Théorème

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

Attention ! Deux matrices ayant les mêmes valeurs propres ne sont pas semblables en général.

5.2.3 Similitude et valeurs propres

Théorème

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

Attention ! Deux matrices ayant les mêmes valeurs propres ne sont pas semblables en général.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5.2.3 Similitude et valeurs propres

Théorème

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

Attention ! Deux matrices ayant les mêmes valeurs propres ne sont pas semblables en général.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La seule valeur propre de A et de B est 5, de multiplicité algébrique 2 car $c_A(t) = (t-5)^2 = c_B(t)$. Mais

5.2.3 Similitude et valeurs propres

Théorème

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

Attention ! Deux matrices ayant les mêmes valeurs propres ne sont pas semblables en général.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La seule valeur propre de A et de B est 5, de multiplicité algébrique 2 car $c_A(t) = (t-5)^2 = c_B(t)$. Mais

$$\boxed{A \not\approx B}$$

5.2.3 Explication

Comme B est une matrice scalaire, $B = 5 \cdot I_2$.
Ici, elle est semblable à toutes les matrices de la forme

$$P^{-1} B P = P^{-1} \cdot (5 \cdot I_2) \cdot P = 5 \cdot P^{-1} \cdot I_2 \cdot P = 5 \cdot P^{-1} P$$
$$= 5 \cdot I_2 = B$$

La matrice B n'est semblable qu'à elle même. Elle ne peut donc pas être semblable à $A \neq B$.