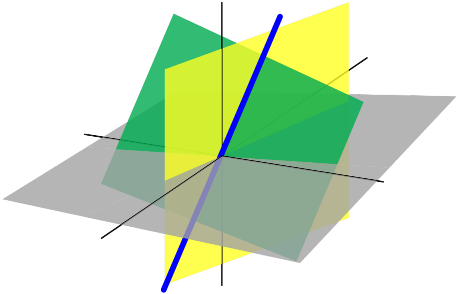
Algèbre Linéaire

Cours du 12 septembre

Jérôme Scherer



1.2.1 Rappels : Matrice échelonnée et réduite

Une matrice est *échelonnée* si

1. les lignes non nulles se trouvent au-dessus des lignes nulles ;
2. le premier coefficient non nul d'une ligne (le *coefficient principal*) se trouve à droite du coefficient principal des lignes précédentes ;
3. les coefficients situés en-dessous d'un coefficient principal sont nuls.

   Elle est dite *échelonnée-réduite* si de plus

4. les coefficients principaux sont tous égaux à 1 ;
5. dans la colonne d'un coefficient principal tous les autres coefficients sont nuls.

Suite

$\boxed{\text{Cas } a \neq 1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{array}\right) \underset{L_4 \cdot \frac{1}{1-a}}{\overset{L_2 \cdot \frac{1}{1-a}}{\underset{L_3 \cdot \frac{1}{1-a}}{\rightsquigarrow}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4-(1+a)L_2}{\overset{L_3-L_2}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2+a \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4+L_3}{\overset{L_3 \cdot (-1)}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+a \end{array}\right)$$

Cas $a \neq -3$. Alors

$a+3 \neq 0$

La $L4$ correspond à l'équation $0 = a+3$

Aucune solution $\boxed{S = \emptyset}$.

Suite

Cas $a = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1 - L_3 + 3L_2$ $\rightsquigarrow$

$1 - (-1) + 3(-1)$

$= -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}$$

$$\boxed{S = \{(-1; -1; -1)\}}$$

1.2.3 Théorème d'existence

Théorème d'existence

Un système linéaire est compatible si et seulement si la colonne des termes inhomogènes n'est pas une colonne pivot.

Démonstration. En d'autres termes la matrice augmentée du système, sous forme échelonnée, ne doit pas contenir une ligne de la forme $0\ 0\ \ldots 0\ b$ avec $b \neq 0$.

En effet une telle ligne correspond à l'équation $0 = b$. Si b est non nul le système est incompatible. $\square$

1.2.4 Théorème d'unicité

Définition

Les colonnes contenant un pivot correspondent à des inconnues dites *principales*. Les autres inconnues sont dites *libres* ou *secondaires*.

Théorème d'unicité

Un système linéaire compatible admet une solution unique si et seulement si toutes les inconnues sont principales. Sinon il y a une infinité de solutions.

En d'autres termes toutes les colonnes sont des colonnes pivots. Ou encore, la matrice, sous forme échelonnée et réduite, n'est constituée que de zéros, sauf sur la diagonale où se trouvent des 1.

Démonstration

Une telle matrice correspond à un système de la forme

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \quad\dots \\ x_m = b_m \end{cases}$$

La solution est alors clairement unique.

Réciproquement, s'il y a une inconnue libre (non principale), elle peut alors prendre n'importe quelle valeur et joue le rôle de paramètre dans la description des solutions. Il y a alors une infinité de solutions. $\square$

Exemple

$$\begin{cases} x & +y & +z & =7 \\ x & +2y & +2z & =11 \\ 3x & +5y & +5z & =29 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 3 & 5 & 5 & 29 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3-3L_1}{\overset{L_2-L_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right) \underset{L_3-2L_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

colonne sans pivot

les inconnues x, y sont principales mais z est une inconnue libre.

$$\overset{L_1-L_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x & = 3 \\ y + z & = 4 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

échelonné et réduit

SUITE

On exprime x et y en fonction de z, ici en soustrayant z des deux côtés de la 2e équation

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 - z \\ z = z \end{cases}$$

En notation vectorielle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4-z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$z \in \mathbb{R}$

S est l'ensemble des points de la droite qui passe par $(3; 4; 0)$ et dont la direction est $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

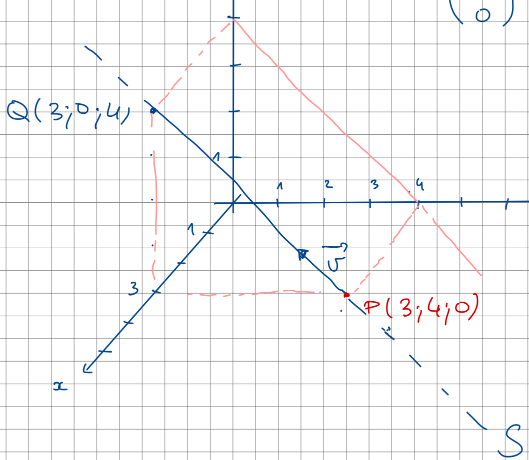
λ est un paramètre

Suite

Je cherche λ tq $y=0$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

$\lambda=4$



$$\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

1.2.5 Résumé : Méthode d'élimination de Gauss

Pour résoudre un système d'équations :

1. passer à la notation matricielle ;
2. appliquer la méthode de Gauss pour échelonner la matrice ;
3. une ligne $0\ 0\ \ldots\ 0\ 0\ b$ avec $b \neq 0$ correspond à une équation sans solution $0 = b$, le système est incompatible, $S = \emptyset$; sinon
4. poursuivre la méthode de Gauss pour réduire la matrice ;
5. pas d'inconnues secondaires (ou libres) : la solution est unique.
6. présence d'inconnues secondaires : elles deviennent les paramètres du système, il y a une infinité de solutions.

1.3.1 Le plan $\mathbb{R}^2$

Un *vecteur à deux composantes* est une matrice formée d'une seule colonne et de deux lignes :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

où $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

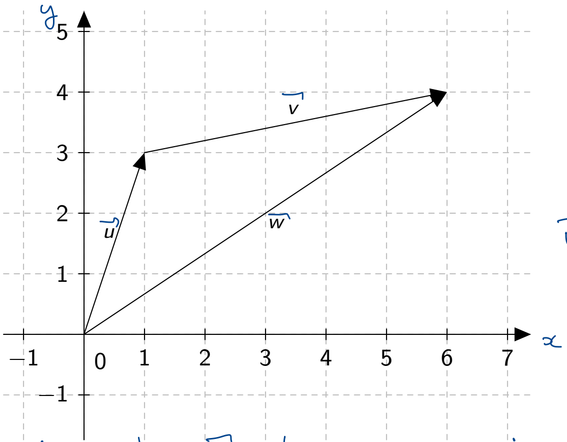
On définit l'addition de vecteurs en utilisant l'addition des nombres réels :

Somme de vecteurs

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

La somme

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\vec{v}$ n'a pas son origine en $(0;0)$, mais que c'est ici c'est $(1;3)$

De fait un vecteur est donné par une famille de "flèches" d'origine arbitraire.

L'action

Le Théorème de Pythagore nous pousse à définir la longueur d'un vecteur de la manière suivante :

Norme d'un vecteur

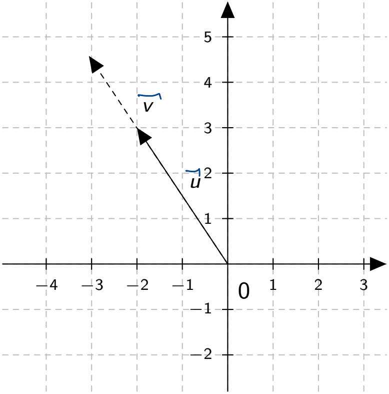
La *norme* du vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ vaut $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

On peut aussi multiplier un vecteur par un *scalaire*, c'est-à-dire un nombre réel α :

Multiple d'un vecteur – Action

$$\alpha \cdot \overrightarrow{u} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$$

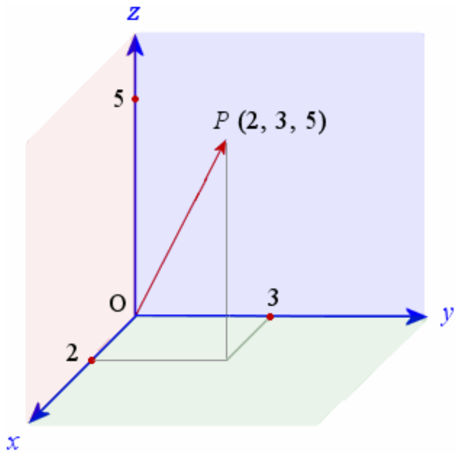
Interprétation géométrique



$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u}$$

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ on dit que les vecteurs sont colinéaires. Le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

1.3.2 L'espace $\mathbb{R}^3$



L'addition et l'action sont définies de manière analogue.

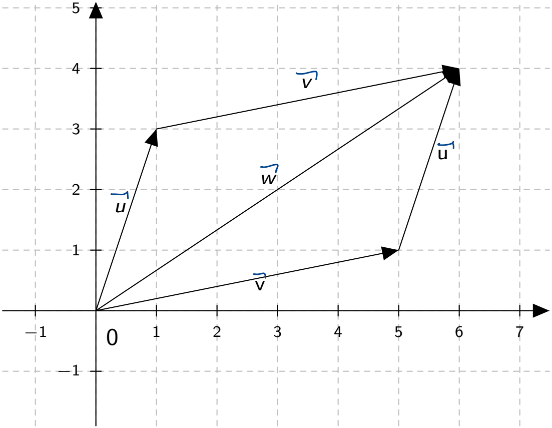
Le formalisme vectoriel

Un vecteur de $\mathbb{R}^3$ étant constitué de 3 composantes réelles, on peut identifier l'ensemble des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ avec l'ensemble des vecteurs.

- En général la notation $(2;3;5)$ indique que l'on voit cet objet comme un point de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont 2, 3 et 5.
- La notation $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ indique que l'on voit cet objet comme un vecteur.

On représente ce vecteur comme une *flèche* issue de l'origine et aboutissant au point $(2;3;5)$. Par contre, pour additionner des flèches il faut pouvoir faire varier l'origine.

La règle de Chasles : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$



Les vecteurs $\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont les sommets d'un parallélogramme.

1.3.3 Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $n \geq 1$. Un *vecteur* dans $\mathbb{R}^n$ est une matrice $n \times 1$ à coefficients réels $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Le vecteur nul est noté $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

La somme et l'action sont définis composante par composante. On note $-\overrightarrow{u} = (-1) \cdot \overrightarrow{u}$.

Propriétés de l'addition

1. Commutativité : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
2. Associativité : $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$.
3. Elément neutre : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
4. Opposé : $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Propriétés de l'action

Les lettres λ et μ désignent des nombres réels.

Propriétés de l'action

5. Distributivité 1 : $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
6. Distributivité 2 : $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

   action

7. Compatibilité des produits : $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.

   produit dans $\mathbb{R}$

8. $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$. (on note $(-1) \cdot \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$)

Observation

Dans un espace vectoriel on peut additionner des vecteurs, on peut multiplier un vecteur par un nombre réel, mais on ne multiplie pas les vecteurs entre eux !

4.1.1 Espaces vectoriels : Définition

Un espace vectoriel est un ensemble V non vide dont les éléments sont appelés vecteurs. Il est muni de deux opérations.

1. L'addition (ou somme) $+ \colon V \times V \to V$ qui associe à deux vecteurs (u, v) leur somme $u + v$.
2. L'action $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V$ qui associe à un nombre α et un vecteur u leur produit αu.

Ces opérations vérifient les huit règles suivantes pour tous vecteurs u, v, w de V, et tous nombres réels α, β.

4.1.1 Espaces vectoriels : Axiomes

1. commutativité de $+$: $u + v = v + u$;
2. associativité de $+$: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. vecteur nul : il existe un élément 0 de V tel que $u + 0 = u = 0 + u$;
4. opposé : il existe un vecteur $-u$ de V tel que $u + (-u) = 0$;
5. distributivité 1 : $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
6. distributivité 2 : $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
7. “compatibilité” : $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
8. unité : $1 \cdot u = u$.

4.1.3 Exemples, I

Le *prototype* de l'espace vectoriel est $\mathbb{R}^n$, muni de la somme et de l'action définies sur les vecteurs à n coefficients.

Les suites. L'ensemble des suites est formé des vecteurs

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

où $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout n.

On additionne les suites composante par composante

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}}$$

L'action aussi est définie composante par composante :

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\alpha \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}} = (\alpha x_0, \alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$$

Les suites forment un espace vectoriel.

- Le vecteur nul est la suite constamment nulle

$(0)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \dots)$ car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (0)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + 0)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_n$

déf. de $+$

propriété de $0 \in \mathbb{R}$

- Opposé de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $-(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

✓

4.1.3 Les polynômes

Soit $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$.

Un élément $p \in \mathbb{P}_n$ est un polynôme de la forme

$$\boxed{p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0}$$

coeff. constant.

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres réels.

On peut aussi travailler dans l'ensemble $\mathbb{P}$ des polynômes de degré arbitraire.

La somme et l'action sont définies degré par degré.

LES POLYNÔMES

$1 \cdot t^i = t^i$

Somme: $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$

$q(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$

$$(p+q)(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somme dans } \mathbb{P}_n}}{p(t) + q(t)} = \underbrace{(a_n+b_n) t^n + \dots + (a_1+b_1) t + (a_0+b_0)}_{\text{somme dans } \mathbb{R}}$$

Action: $\alpha \cdot p(t) = \alpha a_n \cdot t^n + \dots + \alpha a_1 \cdot t + \alpha a_0$

action dans $\mathbb{P}_n$ produit dans $\mathbb{R}$.

Exemple: $p(t) = t^2 + t + 1$, $q(t) = 2t - 1$

$$2 \cdot p(t) - q(t) \overset{\text{action}}{=} 2t^2 + 2t + 2 - (2t - 1) \overset{\text{distr.}}{=}$$

$-u = (-1) \cdot u$

$$= 2t^2 + 2t + 2 - 2t + 1 \underset{\text{de } +}{\overset{\text{comm}}{=}} 2t^2 + \underbrace{\cancel{2t} - \cancel{2t}}_{\text{opposé}} + 2 + 1$$

$$= 2t^2 + 3$$

Polynôme nul: $0 = 0 \cdot t^n + \dots + 0 \cdot t + 0$.

Les fonctions

$V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>Somme</u> : Soient $f, g \in V$. Alors $f+g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\uparrow$ somme de fonctions $\qquad$ $\uparrow$ somme dans $\mathbb{R}$

<u>Action</u> : Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \alpha \cdot f(x)$

<u>Fonction nulle</u> : $0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ car $(f+0)(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) + 0 = f(x)$

$x \longmapsto 0$ $\qquad$ + dans $\mathbb{R}$

<u>Exemple</u> : $f = \cos^2$, $g = \sin^2$, $h = 1$ constante

$$(f+g-h)(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) + g(x) - h(x) =$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0$$