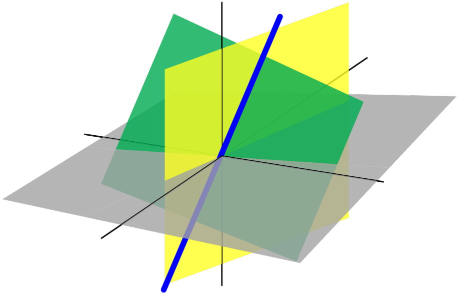
Algèbre Linéaire

Cours du 8 octobre

Jérôme Scherer



2.3.1 Critères d'inversibilité, I et II

Pour conclure la preuve du Théorème alphabétique, regardons les quatre affirmations suivantes :

Propriétés équivalentes

(B) A est équivalente selon les lignes à I_n.

(C) A admet n positions de pivot.

(G) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a au moins une solution.

(K) Il existe une matrice carrée D telle que $AD = I_n$.

Il reste à démontrer que

(C) $\Rightarrow$ (K) $\Rightarrow$ (G) $\Rightarrow$ (B)

Preuve.

Produits de matrices élémentaires

Pour illustrer l'importance de l'ordre des opérations élémentaires, comparons les résultats de ce qui se passe si on ajoute d'abord a fois la deuxième ligne à la troisième puis b fois la première Ìla deuxième, ou vice-versa :

1. $E_{21}(b) \cdot E_{32}(a) =$

2. $E_{32}(a) \cdot E_{21}(b) =$

2.3.2 Application inverse

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Soit A la matrice de taille $n \times n$ telle que $T(\overrightarrow{x}) = A \cdot \overrightarrow{x}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.

Définition

On dit que T admet une application inverse ou réciproque $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si $T \circ S = Id_{\mathbb{R}^n} = S \circ T$.

Théorème

L'application linéaire T admet une application inverse S si et seulement si A est inversible. Dans ce cas $S(\overrightarrow{x}) = A^{-1} \cdot \overrightarrow{x}$.

Exemple. L'inverse de la matrice de rotation R_ϕ est $R_{-\phi}$.

Exemple.

Soit T l'application linéaire représentée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5.1 Factorisation LU

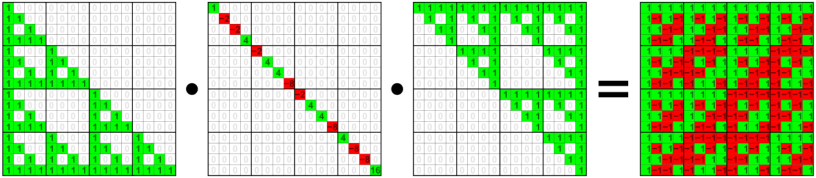
Alan Turing (1912-1954) introduit cette décomposition de matrices en 1948.

Une décomposition $A = LU$ est telle que

1. L est carrée, triangulaire inférieure ("lower") avec des 1 sur la diagonale ;
2. U est une forme échelonnée de A ("upper").

2.5.2 Factorisation *LDU*

Une variante avec une matrice diagonale D au milieu



by Watchduck (a.k.a. Tilman Piesk)

Il s'agit d'une matrice de Walsh. Admirez les fractales de Sierpinski qui apparaissent dans L et U !

2.5.3 Utilité de la factorisation LU

Slogan

La factorisation LU est pratique pour résoudre $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Pourquoi ? Le système $LU\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ se résout en deux temps.

1. Posons $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$. Le système $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ est simple à résoudre car L est triangulaire !
2. Le système $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ est facile à résoudre car U est échelonnée !

En pratique il vaut la peine de calculer la factorisation LU si on doit résoudre des systèmes $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ pour de nombreux $\overrightarrow{b}$.

Remarque : nombre d'opérations.

2.5.4 Exemple

On cherche à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -7x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & -9 \\ -3x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = & 5 \\ 6x_1 & -4x_2 & & -5x_4 & = & 7 \\ -9x_1 & +5x_2 & -5x_3 & +12x_4 & = & 11 \end{array}\right.$$

On passe immédiatement en notation matricielle :

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ -3 & 5 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & -4 & 0 & -5 & 7 \\ -9 & 5 & -5 & 12 & 11 \end{array}\right)$$

Suite.

2.5.4 Exemple : suite

Nous avons soigneusement noté les opérations sur les lignes :

$E_{43}(-3) \cdot E_{42}(-8) \cdot E_{32}(5) \cdot E_{41}(3) \cdot E_{31}(-2) \cdot E_{21}(1) \cdot A = U$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si bien que L est donnée par l'inverse de ce produit (car $A = LU$) :

$$L = E_{21}(-1) \cdot E_{31}(2) \cdot E_{41}(-3) \cdot E_{32}(-5) \cdot E_{42}(8) \cdot E_{43}(3)$$

SUITE.

2.5.5 Marche-à-suivre

1. On échelonne $A \sim U$ avec des opérations élémentaires de type I sur les lignes.
2. On construit L de sorte que les opérations élémentaires sur les lignes du point 1 transforment L en I.

   La matrice L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Le coefficient L_{ij} avec $i > j$ est l'opposé du nombre de fois qu'on ajoute la ligne j à la ligne i pour échelonner A.

3. On résout le système $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$.
4. On résout le système $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.

Suite.

2.5.6 Remarque finale

Pour obtenir une factorisation LU

On doit pouvoir échelonner A sans devoir échanger de lignes !

Dans la pratique (mais pas dans ce cours !) on a besoin de l'échange des lignes, on permet alors à L d'être une matrice triangulaire inférieure permutée, c'est-à-dire une matrice triangulaire inférieure dont certaines lignes ont été échangées.

3.0 Déterminants : rappels

Pour une matrice 2×2 ("diagonale - antidiagonale")

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Pour une matrice 3×3, la règle de Sarrus donne

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

Il y a six termes

Chaque terme a un coefficient de chaque ligne et de chaque colonne.

3.1.1 La règle de Sarrus (1798-1861)

Truc mnémotechnique.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Le déterminant de A

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

3.1.1 La règle de Sarrus (1798-1861)

Le déterminant de A

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$

Chaque triple produit est constitué d'un coefficient de la première colonne (3 choix), d'un autre de la deuxième colonne (2 choix pour ne pas utiliser la même ligne) et d'un dernier dans la troisième colonne (1 seul choix possible).

Attention !

En général le déterminant d'une matrice $n \times n$ devrait être défini par une somme de $n!$ termes, la moitié portant un signe positif, l'autre moitié un signe négatif. Pour $n = 4$, $n! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$...

3.1.2 Déterminant 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

$$= {\color{red}a_{11}}a_{22}a_{33}+{\color{blue}a_{12}}a_{23}a_{31}+{\color{green}a_{13}}a_{21}a_{32}-{\color{green}a_{13}}a_{22}a_{31}-{\color{blue}a_{12}}a_{21}a_{33}-{\color{red}a_{11}}a_{23}a_{32}$$

$$= {\color{red}a_{11}}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+{\color{blue}a_{12}}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+{\color{green}a_{13}}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= {\color{red}a_{11}}\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - {\color{blue}a_{12}}\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + {\color{green}a_{13}}\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

3.1.2 Développement selon la ligne 1

Regardons la matrice de départ attentivement :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Et regardons d'où viennent les trois termes ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{pmatrix}$$

3.1.3 Le déterminant : définition

Soit A_{ij} la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Définition

On pose $\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det A_{1n}$

Théorème

Pour tout i et tout j, on a le déterminant de A est égal à :

1. $(-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\det A_{in}$
2. $(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}\det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}\det A_{nj}$

Théorème

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de la diagonale.

Exemple.

3.1.4 Debriefing

Il existe deux approches du déterminant d'une matrice $n \times n$.

1. Une approche mathématique basée sur une formule qui généralise la formule bien connue du cas $n = 2$ et la règle de Sarrus. Il y a $n!$ termes dans cette formule, nous ne suivons pas cette voie.
2. Le développement selon une ligne ou une colonne, c'est l'approche de ce cours.

La deuxième méthode est notre définition, mais dès que l'on veut connaître explicitement un déterminant on combinera cela avec des opérations sur les lignes (et/ou les colonnes) de la matrice pour simplifier les calculs.

3.2.1 Déterminant et opérations élémentaires

Théorème

a. Une opération élémentaire de type I ne change pas le déterminant ;
b. Une opération élémentaire de type II change le signe du déterminant ;
c. Une opération élémentaire de type III (multiplier une ligne par un nombre réel α) multiplie le déterminant par α.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{pmatrix} \begin{aligned} &= a(d+\lambda b) - b(c+\lambda a) \\ &= ad + \lambda ab - bc - \lambda ba = ad - bc \end{aligned}$$

Suite.

3.2.1 Notation et exemple

Notation.

On écrit parfois $\det A = |A|$.

Exemple 1. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vaut -1 puisqu'on retrouve I_3 en échangeant les lignes 1 et 2.

Exemple 2. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -5 & -7 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

Suite.

3.2.2 Propriétés du déterminant

Proposition

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Remarque

Si une ligne de A est combinaison linéaire des autres lignes, alors

$\det A = 0$.

Critère d'inversibilité

Une matrice carrée est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

3.2.3 Déterminant d'un produit

Théorème

$$\boxed{\det(A^T) = \det A}$$

Preuve. Le développement de det A selon la ligne 1 est identique au développement de $\det(A^T)$ selon la colonne 1. □

Conséquence

Tout ce que nous avons dit sur l'effet des opérations élémentaires sur les lignes s'applique aussi pour les colonnes. Echanger les colonnes d'une matrice carrée change le signe du déterminant, etc.

Interprétation matricielle

Chaque opération élémentaire sur les colonnes correspond à une multiplication à droite par une matrice élémentaire.