Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algèbre linéaire
Examen
Partie commune
Automne 2019

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2019.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur x, x_i désigne la i-ème coordonnée de x.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$
– Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire standard est défini par $x \cdot y = x^T y$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit a un paramètre réel et soient

$$p_1(t) = a + 4t - 5t^2, \qquad p_2(t) = 4 + at - 5t^2, \qquad p_3(t) = 4 - 5t + at^2.$$

Alors les polynômes p_1, p_2 et p_3 sont linéairement dépendants si et seulement si

☐ $a \notin \{-5, 1, 4\}$
☐ $a \in \{-5, -1, 4\}$
☐ $a \in \{-5, 1, 4\}$
☐ $a \notin \{-5, -1, 4\}$

Question 2 : Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Alors une base de $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 5x\}$ est donnée par

☐ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
☐ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$
☐ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
☐ $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

Question 3 : Soit A une matrice de taille $n \times n$ diagonalisable.
Si toutes les valeurs propres de A sont non nulles, alors il est toujours vrai que

☐ A^T et A^{-1} ne sont pas forcément diagonalisables
☐ A^T et A^{-1} sont diagonalisables
☐ A^T est diagonalisable, mais A^{-1} n'est pas forcément diagonalisable
☐ A^{-1} est diagonalisable, mais A^T n'est pas forcément diagonalisable

Question 4 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 15 & 18 \\ 0 & 2 & -6 & -6 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

- ☐ 3, 5, 0 et 2
- ☐ -1, 15, -6 et 2
- ☐ 2, 6, 0
- ☐ -2, 2 et 0

Question 5 : Soit A une matrice de taille $n \times n$.
Si A est orthogonale, laquelle des affirmations suivantes **n'est pas** forcément vraie?

- ☐ Pour $v, w \in \mathbb{R}^n$, Av est orthogonal à Aw si et seulement si v est orthogonal à w
- ☐ $a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j$ pour tout $1 \le i, j \le n$, où $a_1, \ldots, a_n$ sont les colonnes de A et $b_1, \ldots, b_n$ sont les colonnes de A^T
- ☐ $\det A = 1$
- ☐ A^T est orthogonale

Question 6 : Soit $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-d & b+c \\ c-b & a+d \end{bmatrix}.$$

La matrice $M = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, telle que $\big[T(A)\big]_{\mathcal{B}} = M\big[A\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, est

- ☐ $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Question 7 : Soient α un nombre réel et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

La matrice A est inversible si et seulement si

- ☐ $\alpha \in \{3, -1\}$
- ☐ $\alpha \notin \{-3, 1\}$
- ☐ $\alpha \in \{-3, 1\}$
- ☐ $\alpha \notin \{3, -1\}$

Question 8 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$. Alors il est toujours vrai que

- ☐ $Ax = Ac$ possède une infinité de solutions pour tout choix de $c \in \mathbb{R}^n$
- ☐ $Ax = Ac$ possède une unique solution pour tout choix de $c \in \mathbb{R}^n$
- ☐ $Ax = b$ possède au moins une solution pour tout choix de $b \in \mathbb{R}^m$
- ☐ $A^T y = 0$ possède une solution unique

Question 9 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T(e_1) = 6e_1 + 12e_2 - 3e_3\,, \qquad T(e_2) = 2e_1 + 4e_2 - e_3\,,$$
$$T(e_3) = 8e_1 + 12e_2 - 8e_3\,, \qquad T(e_4) = 8e_1 + 10e_2 - 10e_3\,,$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) et (e_1, e_2, e_3) sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Alors

- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

Question 10 : La matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ est orthodiagonalisable et peut s'écrire sous la forme $A = QDQ^T$, avec Q une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.

Si $d_{11} > 0$, alors un choix possible pour Q est

- ☐ $Q = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$
- ☐ $Q = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$
- ☐ $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$
- ☐ $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Question 11 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit $b \in \mathbb{R}^m$.
Soit $w \in \mathbb{R}^n$ une solution du système linéaire $(A^T A)x = A^T b$. Alors il est toujours vrai que

- ☐ w est une solution du système linéaire $Ax = b$
- ☐ la matrice $A^T A$ est inversible
- ☐ $\| b - Aw \| \geq \| b - Au \|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$
- ☐ $\| b - Aw \| \leq \| b - Au \|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$

Question 12 : Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ suivants :

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_1 = 0 \right\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_2 = a_0 + a_1 \right\},$$
$$\mathcal{E}_3 = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_1 = a_2 + 3 \right\},$$
$$\mathcal{E}_4 = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0^2 = a_1^2 \right\},$$

combien sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Question 13 : Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 8x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$
Si $M = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ est la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)$, telle que $\big[T(v)\big]_{\mathcal{B}} = M\big[v\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, alors

- ☐ $b_1 = 2, \quad b_2 = 1$
- ☐ $b_1 = 1, \quad b_2 = 2$
- ☐ $b_1 = 1, \quad b_2 = -2$
- ☐ $b_1 = -2, \quad b_2 = 1$

Question 14 : Soit
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$
Les coefficients de sa matrice inverse $C = A^{-1}$ satisfont

- ☐ $c_{11} = -1$ et $c_{32} = -1$
- ☐ $c_{22} = -1$ et $c_{13} = -1$
- ☐ $c_{21} = -1$ et $c_{13} = 0$
- ☐ $c_{12} = -1$ et $c_{33} = 0$

Question 15 : Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ défini par
$$W = \{w \in \mathbb{R}^m \mid \text{il existe } v \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Av = w\}.$$
Si $\dim(W) = k$, alors

- ☐ $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = n - k$
- ☐ $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = \min(m, n) - k$
- ☐ $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = k$
- ☐ $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = m - k$

Question 16 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 \end{bmatrix}.$$
Alors

- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$

Question 17 : Soient h un paramètre réel,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & 12 & 5 \\ -1 & 4h+4 & h+3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ h-3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Alors l'équation matricielle $Ax = b$

- ☐ admet une infinité de solutions si et seulement si $h \in \{4, 1\}$
- ☐ admet une infinité de solutions si et seulement si $h \in \{-4, 1\}$
- ☐ admet une infinité de solutions si et seulement si $h \in \{-4, -1\}$
- ☐ admet une infinité de solutions si et seulement si $h \in \{4, -1\}$

Question 18 : Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix}$ de l'équation $Ax = b$ satisfait

- ☐ $\widehat{x}_1 = 10/7$, $\widehat{x}_2 = 12/7$
- ☐ $\widehat{x}_1 = 12/7$, $\widehat{x}_2 = 10/7$
- ☐ $\widehat{x}_1 = -10/7$, $\widehat{x}_2 = 12/7$
- ☐ $\widehat{x}_1 = 12/7$, $\widehat{x}_2 = -10/7$

Question 19 : Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit

$$k = \det\left((A + I_n)^2 - (A - I_n)^2\right).$$

Alors

- ☐ $k = 4\det(A)$
- ☐ $k = 2\det(A)$
- ☐ $k = 2^n \det(A)$
- ☐ $k = 4^n \det(A)$

Question 20 : Soient

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad W = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire standard, alors le projété orthogonal de v sur W est

- ☐ $\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -360 \\ 360 \\ -432 \\ -180 \end{bmatrix}$

Question 21 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de passage $P = [P]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[x]_{\mathcal{C}} = P[x]_{\mathcal{B}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, est

- ☐ $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Question 22 : Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$ et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Si $v_1, \ldots, v_n$ sont aussi des vecteurs propres de la matrice AB, alors il est toujours vrai que

- ☐ si B est inversible, alors B est diagonalisable
- ☐ si A est inversible, alors $AB \neq BA$
- ☐ si A est inversible, alors B est diagonalisable
- ☐ le déterminant de B est non-nul