Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algèbre linéaire
Examen
Partie commune
Automne 2017

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2017.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x}$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire standard est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$.
– Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est définie par $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Si A est une matrice de taille 7×6 telle que ses trois dernières colonnes sont linéairement dépendantes, alors

☐ $\operatorname{rang} A \geq 2$
☐ $\operatorname{rang} A \leq 5$
☐ $\operatorname{rang} A = 3$
☐ $\operatorname{rang} A = 4$

Question 2 : Soit h un paramètre réel. Soient

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors $\vec{v}_1$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ si et seulement si

☐ $h \in \{-2, 0, 2\}$
☐ $h \in \{0, 2\}$
☐ $h = 0$
☐ $h \in \{-2, 2\}$

Question 3 : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et soit P une matrice de taille $n \times n$ telle que chacune des colonnes de P est un vecteur propre de la matrice A.
Alors il est toujours vrai que

☐ $AP = PD$ où D est une matrice diagonale
☐ P est inversible et PAP^{-1} est une matrice diagonale
☐ P est inversible et $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale
☐ $PA = DP$ où D est une matrice diagonale

Question 4 : Soient $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $W = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Si $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire standard, alors la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W est

- [ ] $\begin{bmatrix} 3 \\ 5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Question 5 : Soit A une matrice de taille $m \times n$. Supposons qu'il existe une matrice B de taille $m \times k$ et des vecteurs $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{w} \in \mathbb{R}^k$ tels que $A\vec{v} = B\vec{w}$. Alors il est toujours vrai que

- [ ] $n = k$
- [ ] $B\vec{w} \in \text{Im}(A)$
- [ ] le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet toujours au moins une solution pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
- [ ] $\vec{w} = B^{-1}A\vec{v}$

Question 6 : Soit $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2$ et $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = a + b(t-1) + c(t-1)^2 \qquad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

La matrice $M = (T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{C}$, telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = M[p]_{\mathcal{C}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

- [ ] $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Question 7 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calculer la factorisation LU de la matrice A (en utilisant *seulement* des opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en *dessous*). Alors la matrice L est donnée par

- [ ] $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Question 8 : Soient A une matrice de taille $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Soit $\vec{c} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Im}(A)} \vec{b}$. Alors, il est toujours vrai que

- ☐ la solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est $A^{-1}\vec{c}$
- ☐ l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ n'admet aucune solution
- ☐ toute solution de $A\vec{x} = \vec{c}$ est une solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$
- ☐ l'équation $A\vec{x} = \vec{c}$ possède une solution unique

Question 9 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ 3x_3 - 9x_4 \end{bmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$

Question 10 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire de l'exercice précédent. Alors

- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

Question 11 : Soient A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors le nombre

$$\det(A^{-1})\det(A+B)\det(B^{-1})$$

- ☐ est égal à 2
- ☐ est égal à $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$
- ☐ n'est pas défini car la matrice $A + B$ n'est pas forcément inversible
- ☐ est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$

Question 12 : Soit A une matrice de taille $3{\times}3$ telle que

$$\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)\,.$$

Parmi les affirmations suivantes:

(a) la matrice A est diagonalisable,

(b) la matrice A est inversible,

(c) la dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 1$ est égale à 2,

lesquelles sont toujours vraies?

- ☐ seulement (a) et (c)
- ☐ toutes les trois
- ☐ seulement (b)
- ☐ aucune des trois

Question 13 : Soit B une matrice de taille $n{\times}m$ telle que $B^TB = I_m$ et soit A la matrice de taille $n{\times}n$ définie par $A = I_n - 2BB^T$.
Parmi les affirmations suivantes:

(a) $A^T = A\,,$ **(b)** $A^2 = A\,,$ **(c)** $A^TA = I_n\,,$ **(d)** $A = -I_n\,,$

lesquelles sont toujours vraies?

- ☐ (a), (b), (c) et (d)
- ☐ seulement (a) et (c)
- ☐ seulement (a) et (d)
- ☐ seulement (a) et (b)

Question 14 : Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

- ☐ $\widehat{x}_1 = 5$
- ☐ $\widehat{x}_1 = -4$
- ☐ $\widehat{x}_2 = 5$
- ☐ $\widehat{x}_2 = -4$

Question 15 : La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- ☐ n'est pas inversible
- ☐ est inversible, et le coefficient b_{14} de son inverse $B = A^{-1}$ est égal à $\frac{1}{2}$
- ☐ est inversible, et le coefficient b_{14} de son inverse $B = A^{-1}$ est égal à 2
- ☐ est inversible, et le coefficient b_{14} de son inverse $B = A^{-1}$ est égal à 1

Question 16 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 - 6x_3 \end{bmatrix}. \quad \text{Soit } \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

La matrice $M = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}$, telle que $\big[T(\vec{x})\big]_{\mathcal{B}} = M\big[\vec{x}\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, est

- ☐ $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $M = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$
- ☐ $M = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$
- ☐ $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Question 17 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

- ☐ 1 et 4
- ☐ 1 et 2
- ☐ 1, 2 et 3
- ☐ 1 et 3

Question 18 : Soit A la matrice de l'exercice précédent et E_1 l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$. Alors:

- ☐ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- ☐ $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Question 19 : La matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & x & 0 \\ 2 & -1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

est inversible si et seulement si

- ☐ $x \notin \left\{0\,,\, -\sqrt{3}\,,\, \sqrt{3}\right\}$
- ☐ $x \notin \left\{0\,,\, -2\,,\, 2\right\}$
- ☐ $x \notin \left\{0\,,\, -\sqrt{2}\,,\, \sqrt{2}\right\}$
- ☐ $x \notin \left\{0\,,\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

Question 20 : Si $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire standard, laquelle des bases suivantes est orthonormée?

- ☐ $\left(\begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{bmatrix} \right)$
- ☐ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
- ☐ $\left(\begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{bmatrix} \right)$
- ☐ $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Question 21 : Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n \times n$ telles que chaque espace propre de B est contenu dans un espace propre de A. Alors

- ☐ AB est diagonalisable si et seulement si A et B ont les mêmes valeurs propres
- ☐ AB n'est jamais diagonalisable
- ☐ AB est toujours diagonalisable
- ☐ AB est diagonalisable si et seulement si A et B ont les mêmes espaces propres

Question 22 : Soient h un paramètre réel,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 14 & 1 \\ -1 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} h+11 \\ 6 \\ h-1 \end{bmatrix}.$$

Alors l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$

- ☐ admet pour unique solution le vecteur $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ si $h \neq 7$
- ☐ n'admet aucune solution si $h \neq 7$
- ☐ admet pour unique solution le vecteur $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ si $h = 7$
- ☐ admet le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$ pour solution si $h = 7$

Question 23 : Soient

$$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de passage $P = (\mathrm{Id})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$, telle que $\big[\vec{x}\big]_{\mathcal{B}} = P\big[\vec{x}\big]_{\mathcal{E}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, est

- ☐ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- ☐ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Question 24 : Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_3$ suivants :

$\big\{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(0) = 2\,,\ p(2) = 0\big\}$, $\quad \big\{p \in \mathbb{P}_3 \mid p'(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\big\}$,

$\big\{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(t) = 2a - at^3 \text{ avec } a \in \mathbb{R}\big\}$, $\quad \big\{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(t) = ct^2 - c^2t \text{ avec } c \in \mathbb{R}\big\}$,

combien sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_3$?

- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ 4