Exercice 1. Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) L'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1x_4$ n'est pas linéaire à cause du terme x_1x_4.

b) L'équation $x + y + z = x + y + z$ est linéaire. Elle est en fait équivalente à l'équation $0 = 0$.

c) L'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ n'est pas linéaire à cause des carrés des inconnues qui apparaissent ici. Les solutions de cette équation sont en fait tous les points d'une sphère de rayon 2 centrée en l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

d) L'équation $x + (\frac{1}{\pi} - \sqrt{7})y - z = 0{,}001$ est linéaire.

Exercice 2. Les opérations suivantes sont-elles valides pour résoudre un système d'équations ?

a) Non ! On ne peut pas simultanément utiliser la ligne 1 pour modifier la ligne 2 et la ligne 2 pour modifier la ligne 1.

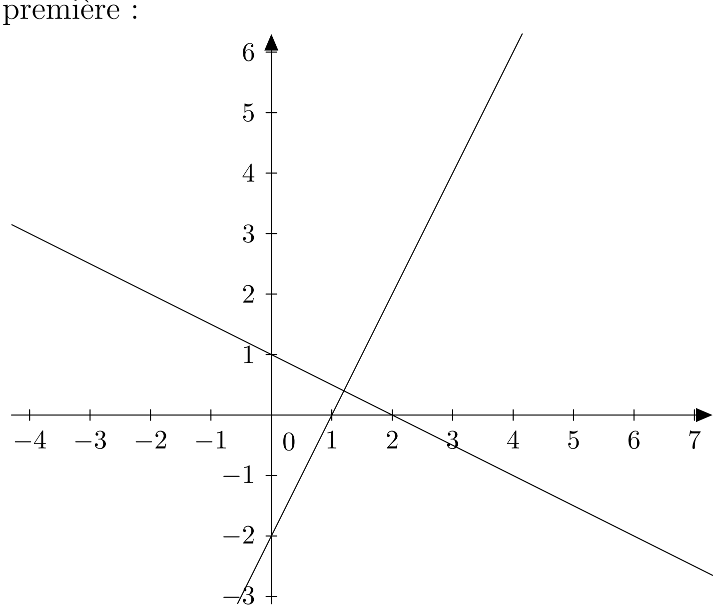
b) Oui.

c) Non ! Bien que le système obtenu soit le même que sous b), on ne peut JAMAIS multiplier une ligne par zéro. Le système obtenu ici est équivalent au système initial, mais c'est uniquement la chance qui a nous a aidé...

Exercice 3. On considère l'équation $ax + by = 2$.

a) L'équation $2x - y = 2$ est équivalente à $y = 2x - 2$. Il s'agit donc d'une droite de pente 2 et d'ordonnée à l'origine -2.

b) Ici la pente est $-1/2$ et l'ordonnée à l'origine vaut 1. Cette droite est perpendiculaire à la première :



c) On voit que les droites se coupent lorsque x est un peu plus grand que 1. Résolvons donc le système pour nous en assurer :

$$\begin{array}{ll} 2x-y &= 2 \\ x+2y &= 2 \end{array} \rightsquigarrow L_1 - 2L_2 \quad \begin{array}{l} -5y=-2 \\ x+2y=2 \end{array}$$

Ainsi $y = \dfrac{2}{5}$ et en remplaçant dans la deuxième équation on trouve $x = 2 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{6}{5}$.

Exercice 4. En utilisant les variables dans l'ordre x, y, u, v, w, on peut écrire la matrice augmentée suivante (la dernière colonne correspond aux termes inhomogènes), que l'on échelonne :

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{L2}\leftrightarrow\text{L1}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{\text{L4}\to\text{L4}+(-7)\cdot\text{L1}}{\overset{\text{L2}\to\text{L2}+(-2)\cdot\text{L1}}{\underset{\sim}{\text{L3}\to\text{L3}+(-3)\cdot\text{L1}}}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 1 & -14 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{L4}\to\text{L4}+(-7)\cdot\text{L2}}{\overset{\text{L3}\to\text{L3}+(-1)\cdot\text{L2}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{L4}\to\frac{\text{L4}}{2}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{L4}\leftrightarrow\text{L3}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{L1}\to\text{L1}+1\cdot\text{L2}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cela est équivalent au système :

$$\begin{cases} x + w = 1 \\ y + w = -2 \\ u + 2v - 3w = 0 \end{cases}$$

qui a comme solutions

$$x = 1 - w, y = -2 - w, u = 3w - 2v,$$

où v et w sont des nombres réels quelconques (il y a donc une infinité de solutions). Pour mieux voir géométriquement ces solutions on aime les écrire sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un plan dans $\mathbb{R}^5$ passant par le point $(1, -2, 0, 0, 0)$. Il y a deux *paramètres*, v et w, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On dit aussi qu'on a deux degrés de liberté.

Si on avait fait le choix (probablement plus logique) d'ordonner les inconnues par ordre alphabétique, la matrice du système sera différente et sa forme échelonnée et réduite également :

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et la forme paramétrique de la solution générale est alors, pour toutes valeurs réelles de v et y :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. On écrit la matrice augmentée du système, en échangeant la première et la dernière ligne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ a & 1-a & 1-a & a^2 \\ a & 1+a & 1+a & a-a^2 \end{array}\right) \underset{\text{L3}\to\text{L3}-a\text{L1}}{\overset{\text{L2}\to\text{L2}-a\cdot\text{L1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{L2}\leftrightarrow\text{L3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \end{array}\right) \overset{\text{L1}\to\text{L1}-\text{L2L3}\to\text{L3}-(1-2a)\text{L2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. On distingue les cas :

- Si $a \neq 0$ et $a \neq 1/2$, le nombre $2a^2 - a$ est non nul. La dernière équation ne peut être vérifiée et le système ne possède pas de solutions. On écrit alors $S = \emptyset$ pour dire que l'ensemble des solutions est vide.
- Si $a = 0$ ou $a = 1/2$, la dernière équation donne $0 = 0$. Il reste alors deux équations à trois inconnues. On a ainsi une infinité de solutions paramétrées par $z \in \mathbb{R}$. On a toujours $x = 1 - a$ et $y = -z$. On choisit z comme inconnue libre, c'est-à-dire comme paramètre et on obtient :

  $$S = \{(1-a; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

  Le système possède une droite entière de solutions.

Exercice 6. On écrit la matrice augmentée du système, où l'on a échangé les première et dernière lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -2\sqrt{2} & 2 & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{L3}\to\text{L3}+(-\sqrt{2})\cdot\text{L1}}{\overset{\text{L2}\to\text{L2}+(-2)\cdot\text{L1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2-2\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{array}\right) \overset{\text{L2}\to\text{L2}+(-2)\cdot\text{L3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -4 & -6+2\sqrt{2} & -7+\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{array}\right) \overset{\text{L2}\to\text{L2}\cdot\frac{-1}{4}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{L3}\to\text{L3}+\text{L2}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}+\frac{3}{2} & \sqrt{2}+\frac{3}{4} \end{array}\right) \Rightarrow Z = \frac{1}{2}, Y = 1, X = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Au final, on trouve $x = \frac{\pi}{4}, y = 0$ et $z = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 7. Choix Multiple.

a. On écrit la matrice augmentée et on travaille :

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ a^2+1 & 2a & -2 \end{array}\right) \underset{\text{L2}\to\text{L2}-2a\cdot\text{L1}}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ -a^2+1 & 0 & -2-2a \end{array}\right)$$

On distingue les cas :

- Si $a=-1$, alors la ligne du bas ne contient que des zéros. Donc il reste l'équation $-x+y=1$, ce qui donne les solutions $x=y-1$ (infinité de solutions paramétrées par $y\in\mathbb{R}$). Ceci élimine la première réponse.
- Si $a=1$, alors la dernière ligne donne $0=2$, ce qui n'est pas possible. Donc il n'y a pas de solution. Ce calcul élimine les réponses 3 et 4.
- Si $a\neq\pm1$, alors la dernière équation donne $x=-2\frac{1+a}{1-a^2}=-2\frac{1}{1-a}$. On en déduit de la première équation que $y=1+2\frac{a}{1-a}$. Dans ce cas, il y a donc une solution (unique). C'est donc la réponse 2 qui est la seule correcte.

b. On écrit la matrice augmentée et on travaille :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 2 & 4a & 2 & 1 \\ 4 & 4a & 2 & 1+2a \end{array}\right) \underset{\substack{\text{L3}\to\text{L3}+(-1)\cdot\text{L1} \\ \text{L4}\to\text{L4}+(-2)\cdot\text{L1}}}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & 4a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a-4 & -2 & 2a-1 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{L3}\to\text{L3}+(-2a)\cdot\text{L2} \\ \text{L4}\to\text{L4}+(-2a)\cdot\text{L2}}}{\widetilde{\quad}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & -2 & -4a & -2a+4a^2 \\ 0 & -4 & -2-4a & 4a^2-1 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{L3}\to\text{L3}+\text{L2} \\ \text{L4}\to\text{L4}+2\cdot\text{L2}}}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & 0 & 2(1-2a) & (1-2a)^2 \\ 0 & 0 & 2(1-2a) & (1-2a)^2 \end{array}\right)$$

On distingue alors deux cas :

- Si $(1-2a)=0$, c'est-à-dire $a=\frac{1}{2}$, alors on a les équations : $2x+2y+2z=1$ ainsi que $2y+2z=0$, ce qui donne les solutions $x=\frac{1}{2}$, $y=-z$ (infinité de solutions paramétrées par $z\in\mathbb{R}$).
- Si $(1-2a)\neq0$, alors la dernière équation donne $z=\frac{1-2a}{2}$. On trouve ensuite $y=0$ et, finalement, $x=a$. Dans ce cas, le système possède une seule solution.

Trois remarques :

(a) Lors d'un examen il n'est pas nécessaire de trouver les solutions explicitement. Il suffit de se rendre compte que la matrice augmentée du système sous sa forme échelonnée ne contient aucune ligne dont le pivot se trouve dans la colonne des termes inhomogènes pour conclure que :

(b) Le système a toujours au moins une solution (ce qui élimine les réponses 2 et 4).

(c) Dans ce cas, il a été judicieux de ne pas diviser la première ligne de la matrice par deux, ce qui aurait fait apparaître des fractions et aurait rendu les calculs plus dur.

c. ☐ Faux. Considérons par exemple les trois équations $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$, $x_1=0$ et $x_1=1$. Le système formé de ces trois équations à 5 inconnues n'a visiblement aucune solution.

- ☐ Faux. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Ce système *homogène* admet la solution nulle $x=y=z=0$.

- ☐ Faux. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Ce système *homogène* admet une infinité de solutions.

- ☐ Vrai. Un système d'une équation homogène à trois inconnues est de la forme : $ax+by+cz=0$, et il admet toujours la solution $(0;0;0)$. De fait l'ensemble des solutions est un plan de $\mathbb{R}$'3 passant par l'origine.

d. Seule la première équation est linéaire. En effet, la présence de la racine carrée d'une inconnue, du cosinus d'une inconnue ou du carré d'une inconnue n'est pas autorisée.