Durée : 144 minutes

EPFL

Algèbre linéaire Examen

Partie commune

Automne 2021

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue
-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue
-1 point si la réponse est incorrecte.

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2021.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\boldsymbol{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m\times n$ à coefficients réels.
– Pour $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La droite de régression linéaire pour les points $(-2,-4)$, $(0,0)$, $(1,4)$, $(2,1)$, $(4,-1)$ est

☐ $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x.$

☐ $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x.$

☐ $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x.$

☐ $y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x.$

Question 2 : L'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

est telle que

☐ $b_{32} = -2.$

☐ $b_{32} = 2.$

☐ $b_{32} = 1.$

☐ $b_{32} = -1.$

Question 3 : Soit A une matrice symétrique telle que

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés, respectivement, aux trois valeurs propres -5, 5 et 2. Alors

☐ $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

☐ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

☐ $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

☐ $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$

Question 4 : Soit a un paramètre réel. Le système

$$\begin{cases} x + ay + 3z = 0 \\ y - 2z = 3 \\ -x + 4y + 4z = a \\ (a+6)y + 3z = a^2 \end{cases}$$

☐ admet au moins une solution si et seulement si $a \in \{-2, 3\}$.

☐ admet une infinité de solutions si et seulement si $a = -2$.

☐ n'admet pas de solution si et seulement si $a \in \{-2, 3\}$.

☐ admet une unique solution si et seulement si $a = 3$.

Question 5 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

- ☐ $\det(A) = 6$.
- ☐ $\det(A) = -24$.
- ☐ $\det(A) = 0$.
- ☐ $\det(A) = 48$.

Question 6 : Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

- ☐ $r_{13} = -4$.
- ☐ $r_{13} = 0$.
- ☐ $r_{13} = -2$.
- ☐ $r_{13} = -3$.

Question 7 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ T est injective et surjective.
- ☐ T est injective mais n'est pas surjective.
- ☐ T est surjective mais n'est pas injective.
- ☐ T n'est ni injective ni surjective.

Question 8 : Soient $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = \left(1+t^2, 2-t^3, t, 1-t^2\right)$ une base ordonnée de $\mathbb{P}_3$. Soit $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a-b \\ a-c \\ 2a+c \\ 2b+d \end{pmatrix}.$$

Soit $A = [T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_3$ et la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^4$, telle que $\left[T(p)\right]_{\mathcal{E}} = A\left[p\right]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_3$. Alors on a

- ☐ $a_{34} = -1$.
- ☐ $a_{34} = 2$.
- ☐ $a_{34} = -2$.
- ☐ $a_{34} = 1$.

Question 9 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de changement de base $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $\left[\boldsymbol{x}\right]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\left[\boldsymbol{x}\right]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, est

- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Question 10 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Une solution $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a pour première coordonnée

☐ $x_1 = -1.$ ☐ $x_1 = 5.$ ☐ $x_1 = 4.$ ☐ $x_1 = -2.$

Question 11 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ satisfait

☐ $\widehat{x}_1 = -3.$ ☐ $\widehat{x}_1 = -6.$ ☐ $\widehat{x}_1 = 6.$ ☐ $\widehat{x}_1 = 3.$

Question 12 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des valeurs propres réelles de A est

☐ $\{0\}.$ ☐ $\{-1, 0\}.$ ☐ $\{0, 1\}.$ ☐ $\{-1, 1\}.$

Question 13 : L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

sans changer l'ordre des colonnes fournit une base orthogonale de $\mathrm{Im}(A)$ donnée par les vecteurs

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$

Question 14 : La projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sur le sous-espace vectoriel engendré par la première et la deuxième colonne de la matrice A de la Question 13 est le vecteur

☐ $\begin{pmatrix} 21 \\ -15 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 39 \\ -9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Question 15 : La matrice A de la Question 13 possède une décomposition QR telle que

☐ $r_{33} = 3\sqrt{2}.$ ☐ $r_{33} = 2\sqrt{3}\ .$ ☐ $r_{33} = \sqrt{3}.$ ☐ $r_{33} = \sqrt{2}.$

Question 16 : Soient

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et $W = \mathrm{Vect}\,\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\} \subset \mathbb{R}^4$. Alors une base du complément orthogonal $W^\perp$ est donnée par les vecteurs

- ☐ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 17 : Si $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel V et si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres réels arbitraires, alors $\{\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \alpha_2\boldsymbol{v}_2, \ldots, \alpha_k\boldsymbol{v}_k\}$ est aussi une famille de vecteurs linéairement indépendants de V.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Les polynômes

$$p_1(t) = t^2\,, \quad p_2(t) = t^2 + t^3\,, \quad p_3(t) = t - t^3\,, \quad p_4(t) = 1 + t^3$$

forment une base de $\mathbb{P}_3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Si A est une matrice de taille 3×3 avec valeurs propres 1, 2 et 4, alors $\det(A) = 8$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n\times n$, alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -11 & 11 \\ 11 & 11 & -11 \\ -11 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

est orthogonalement diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit A une matrice de taille 6×6. Si le polynôme caractéristique de A est $p(\lambda) = (\lambda-3)^2\lambda^4$, alors l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ est toujours de dimension 2.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit V un espace vectoriel tel que $\dim V = n$. Si S est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants de V, alors S est une base de V.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit A une matrice de taille 9×5. Si $\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = 5$, alors $\dim\big(\mathrm{Im}(A)\big) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sachant que R est la forme échelonnée réduite de la matrice A, alors les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\operatorname{Ker}(A)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit A la matrice de la Question 25. Alors les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\operatorname{Im}(A)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$, alors $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont orthogonaux.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $\mathcal{B}$ la base ordonnée de $\mathbb{P}_2$ donnée par $\mathcal{B} = \left(1,\ 1+t,\ 1+t^2\right)$ et soit $p \in \mathbb{P}_2$ défini par $p(t) = 3 + 4t + 5t^2$. Alors la première coordonnée de p par rapport à la base $\mathcal{B}$ est -6.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Si A est une matrice de taille $n \times n$, alors $\det(A^T) = -\det(A)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : L'ensemble $\left\{p \in \mathbb{P}_4 \mid p(t) = at^4 \text{ pour un certain } a \in \mathbb{R}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_4$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soient

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ est l'élément de $W = \operatorname{Vect}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ le plus proche de $\boldsymbol{y}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $T : V \to W$ une application linéaire. Si $\dim W < \dim V$, alors T n'est pas injective.

☐ VRAI ☐ FAUX