

Algèbre linéaire

Examen

Partie commune

Automne 2020

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l’élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème coordonnée de \mathbf{x} .
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l’espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ désigne l’espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.
- Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n’y a qu’**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit A une matrice symétrique telle que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés, respectivement, aux valeurs propres 1, 0 et 2. Alors

<input type="checkbox"/> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$	<input type="checkbox"/> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
<input checked="" type="checkbox"/> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$	<input type="checkbox"/> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Question 2 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors la dimension de l’espace propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est égale à

<input type="checkbox"/> 0.	<input checked="" type="checkbox"/> 1.	<input type="checkbox"/> 2.	<input type="checkbox"/> 3.
-----------------------------	--	-----------------------------	-----------------------------

Question 3 : L’inverse $B = A^{-1}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est tel que

<input type="checkbox"/> $b_{32} = -2/3.$	<input checked="" type="checkbox"/> $b_{23} = -2/3.$	<input type="checkbox"/> $b_{31} = -2/3.$	<input type="checkbox"/> $b_{13} = -2/3.$
---	--	---	---

Question 4 : Le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est

- $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 3.$
- $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda - 3.$
- $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda - 3.$
- $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - \lambda.$

Question 5 : Si on calcule la décomposition LU de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(en utilisant **seulement** les opérations élémentaires sur les lignes consistant à ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne **en dessous**), alors la matrice L obtenue est telle que

- $\ell_{42} = 1.$
- $\ell_{42} = 2.$
- $\ell_{42} = 1/3.$
- $\ell_{42} = -1/3.$

Question 6 : Soient α un paramètre réel et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur de α est-ce qu'on a $\text{rang}(A) < 3$?

- $\alpha = 3.$
- $\alpha = -3.$
- $\alpha = 0.$
- $\alpha = -7.$

Question 7 : On considère \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique. Soit \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^3 définie par les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alors une base orthogonale, obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à \mathcal{B} sans changer l'ordre, est donnée par les vecteurs

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$

Question 8 : On reprend les données de la question précédente. La projection orthogonale du vecteur

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ est le vecteur

$\begin{pmatrix} 7/3 \\ -7/6 \\ 7/6 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 19/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Question 9 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Si $\hat{\mathbf{x}}$ est une solution au sens des moindres carrés du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, alors

$\hat{x}_2 = 8/7$. $\hat{x}_2 = -2/7$. $\hat{x}_2 = 3$. $\hat{x}_2 = 6/7$.

Question 10 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a pour deuxième coordonnée

$x_2 = -3$. $x_2 = 10$. $x_2 = 6$. $x_2 = 1$.

Question 11 : On se donne les bases ordonnées de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ suivantes

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = (1, t + t^2, t - t^2).$$

Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(\mathbf{x}) = x_1 t + x_2 t^2$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Alors la matrice associée à T par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{D} est

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Question 12 :

Le produit $C = AB$ des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est tel que

- $c_{53} = 10.$ $c_{53} = -8.$ $c_{53} = 18.$ $c_{53} = 38.$

Question 13 : La droite de régression linéaire pour les points $(1, 2), (-1, 5), (0, 3)$ est

$y = \frac{10}{3} - \frac{3}{2}x.$

$y = \frac{3}{2} + \frac{10}{3}x.$

$y = -\frac{10}{3} - \frac{3}{2}x.$

$y = \frac{10}{3} - \frac{14}{9}x.$

Question 14 : Soit \mathcal{B} la base ordonnée de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ donnée par $\mathcal{B} = (-1 + t, 2t - t^2, 2 - t + 3t^2)$ et soit $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ défini par $p(t) = t - 8t^2$. La troisième coordonnée de p par rapport à la base \mathcal{B} est

- $-15/7.$ $11/7.$ $15.$ $-11/7.$

Question 15 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

- $\det(A) = -8.$ $\det(A) = -3.$ $\det(A) = 7.$ $\det(A) = 0.$

Question 16 : Soient les vecteurs de \mathbb{R}^4

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ 2h \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur de $h \in \mathbb{R}$ le vecteur \mathbf{b} est-il dans $\text{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}?$

- $h = 1/8.$ $h = -2.$ $h = 1.$ $h = 1/4.$

Question 17 : Soient $\mathcal{B} = (1 + 3t, 2 + t^2, 4 + t + 3t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ deux bases ordonnées de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Si la matrice P représente la matrice de changement de base telle que $[q]_{\mathcal{C}} = P[q]_{\mathcal{B}}$ pour tout $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, alors

- $p_{12} = 4$. $p_{12} = 3$. $p_{12} = 0$. $p_{12} = 2$.

Question 18 : Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a

- $r_{24} = -11/12$. $r_{24} = 19/12$. $r_{24} = -19/12$. $r_{24} = 17/12$.

Question 19 : La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- est inversible et son inverse est orthogonalement diagonalisable.
 est inversible et son inverse n'est pas orthogonalement diagonalisable.
 n'est pas orthogonalement diagonalisable.
 n'est pas inversible.

Question 20 : Soient k et ℓ des paramètres réels et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\lambda = 6$ est une valeur propre de A lorsque

- $5k + \ell = 20$.
 $5k + \ell = 2$.
 $k + \ell = 4$.
 $5k + \ell = 56$.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 21 : Si chaque ligne d'une matrice A est orthogonale à tous les vecteurs de $\text{Ker}(A)$, alors la matrice A est symétrique.

VRAI FAUX

Question 22 : L'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ tel que } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

VRAI FAUX

Question 23 : Soient

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur \mathbf{v} est dans l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

VRAI FAUX

Question 24 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$ est dans $\text{Ker}(A)$.

VRAI FAUX

Question 25 : Soit A la matrice de la question précédente. Le vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est dans $\text{Im}(A)$, le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A .

VRAI FAUX

Question 26 : Le système linéaire

$$\begin{cases} 2x - 4z + 2t = -10 \\ y + z = 2 \\ 3x + 5y + 8z - t = -6 \\ 2x + y - 3z + 2t = 1 \end{cases}$$

possède au moins une solution.

VRAI FAUX

Question 27 : Si une matrice A est inversible, alors $A^T A$ est aussi inversible.

VRAI FAUX

Question 28 : Soit A une matrice de taille 3×3 à coefficients réels dont les valeurs propres sont $-1, 1$ et 2 . Alors le déterminant de $A^T A$ est égal à 2 .

VRAI FAUX

Question 29 : Si, comme dans la question précédente, A est une matrice de taille 3×3 à coefficients réels dont les valeurs propres sont $-1, 1$ et 2 , alors la matrice A est inversible et le déterminant de A^{-1} est égal à $-1/2$.

VRAI FAUX

Question 30 : Soit A une matrice symétrique à coefficients réels de taille $n \times n$. On suppose que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs propres de A dont les valeurs propres associées sont respectivement α, α et β , où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq \beta$. Alors pour tout $\mathbf{w} \in \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ on a $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_3 = 0$.

VRAI FAUX

Question 31 : Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs non-nuls. Si \mathbf{u} est orthogonal à \mathbf{v} et \mathbf{v} est orthogonal à \mathbf{w} , alors \mathbf{u} est orthogonal à \mathbf{w} .

VRAI FAUX

Question 32 : Soit A une matrice de taille 8×5 telle que $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$. Alors la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A est égale à 3 .

VRAI FAUX

Question 33 : Soit A une matrice de taille $m \times (m+1)$ à coefficients réels et telle que $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ et $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ et soit $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Alors $\{\mathbf{z}\}$ est une base de $\text{Ker}(A)$.

VRAI FAUX

Question 34 : Les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

VRAI FAUX

Question 35 : Soient A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times m$ telles que BA soit inversible. Alors le rang de A est égal à n .

VRAI FAUX

Question 36 : Sachant que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 47/11 \\ 0 & 1 & 0 & -49/22 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la forme échelonnée réduite de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

alors une base du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A est donnée par les vecteurs

$$(1, 0, 0, 47/11), \quad (0, 1, 0, -49/22), \quad (0, 0, 1, 3/11).$$

VRAI FAUX

Question 37 : La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

VRAI FAUX

Question 38 : Soit S un sous-ensemble de l'espace vectoriel V . Si $\dim V = n$ et si S engendre V , alors S est une base de V .

VRAI FAUX

Question 39 : Soient V un espace vectoriel de dimension 2, W un espace vectoriel de dimension 5 et $T: V \rightarrow W$ une application linéaire injective. Alors la dimension de $\text{Im}(T)$ est égale à 2.

VRAI FAUX

Question 40 : Si A est une matrice de taille 6×4 , alors la dimension de $\text{Ker}(A)$ est plus grande ou égale à 2.

VRAI FAUX