Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algèbre linéaire
Examen
Partie commune
Automne 2016

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2016.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x}$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

- ■ -2 et 7.
- ☐ 3 et 4.
- ☐ -5, -1 et 1.
- ☐ -2 et 3.

Question 2 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de T dans les bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.
- ■ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 6 \\ 10 & -7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Question 3 : Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sin a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} -a/2 \\ -10a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels?

- ☐ seulement (c) et (e).
- ☐ tous sauf (b).
- ☐ tous sauf (d).
- ■ seulement (a), (c) et (e).

Question 4 : Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ semblables.
Quel énoncé n'est pas nécessairement vrai?

- ☐ Les polynômes caractéristiques de A et de B sont les mêmes.
- ☐ Les rangs de A et de B sont les mêmes.
- ■ A et B ont les mêmes sous-espaces propres.
- ☐ A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

Question 5 : Soient $m \geq 2$, A une matrice de taille $m \times (m-1)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur non nul. Alors l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ peut être

- ■ l'ensemble vide.
- ☐ égal à $\mathbb{R}^{m-1}$.
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension $m-2$.
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension 1.

Question 6 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $B = A^{-1}$, alors l'élément b_{12} de B est égal à

- ☐ $-2/3$.
- ■ $1/9$.
- ☐ $1/3$.
- ☐ $-1/9$.

Question 7 : Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et le sous-espace vectoriel

$$V = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Alors, la projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur V est

- ■ $\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 255 \\ 396 \\ 375 \end{pmatrix}$.

Question 8 : Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_4$ une application linéaire. Si le rang de T est égal à 4, alors l'ensemble $\{T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), T(2\vec{e}_2), T(\vec{e}_3 + \vec{e}_4), T(\vec{e}_4 + \vec{e}_1)\}$

- ☐ ne peut pas être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.
- ☐ n'est pas linéairement indépendante.
- ■ peut être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.
- ☐ est une base de $\mathbb{P}_4$.

Question 9 : Parmi les formules suivantes laquelle est toujours vraie pour tout choix de deux matrices inversibles A et B de taille $n \times n$?

- ■ $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$.
- ☐ $(2A)^{-1} = 2^{-n} A^{-1}$.
- ☐ $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$.
- ☐ $(A + B^T)^{-1} = A^{-1} + (B^{-1})^T$.

Question 10 : Soit $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ l'application linéaire définie par $T\big(p(t)\big) = (t+1)p(t)$. Alors la matrice de T dans les bases $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ et $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ est

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ■ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 11 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés $\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

- ☐ $\widehat{x}_2 = 1/6$.
- ☐ $\widehat{x}_2 = -35/6$.
- ☐ $\widehat{x}_2 = 41/6$.
- ■ $\widehat{x}_2 = -5/6$.

Question 12 : Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \mathrm{Col}(U)$. Soit proj_W la projection orthogonale sur W. Alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

- ☐ $U^T U\vec{x} = \mathrm{proj}_W \vec{x}$ et $UU^T\vec{y} = \mathrm{proj}_W \vec{y}$.
- ☐ $U^T U\vec{x} = \vec{x}$ et $UU^T\vec{y} = \vec{0}$.
- ☐ $U^T U\vec{x} = \vec{x}$ et $UU^T\vec{y} = \vec{y}$.
- ■ $U^T U\vec{x} = \vec{x}$ et $UU^T\vec{y} = \mathrm{proj}_W \vec{y}$.

Question 13 : Pour quels nombres réels b est-il vrai que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2b & 6 & 4 \\ 0 & b-1 & 1 \\ -b & 2b-5 & 5 \end{pmatrix}$$

est égal à 0?

- ☐ -1 et 1.
- ☐ aucun.
- ☐ 0 et -1.
- ■ 0 et 1.

Question 14 : Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie?

- [ ] $\det A = -4$.
- [ ] A est une matrice de changement de base.
- [ ] le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle.
- [x] le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes.

Question 15 : Soit A une matrice de taille $4{\times}5$ telle que l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{0}$ possède exactement deux variables libres. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel

$$W = \left\{\vec{b} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } A\vec{x} = \vec{b} \text{ est compatible}\right\} \ ?$$

- [ ] 1.
- [ ] 0.
- [x] 3.
- [ ] 2.

Question 16 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $A = LU$ est une factorisation LU de A (L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et U est une matrice triangulaire supérieure), alors l'élément ℓ_{32} de L est

- [x] 3.
- [ ] $-3/2$.
- [ ] $1/2$.
- [ ] $3/2$.

Question 17 : On considère l'espace vectoriel formé par les matrices de taille $3{\times}3$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit h un paramètre réel. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 4 & 0 & h \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3h \\ 0 & 4h & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes

- [x] si et seulement si $h \neq 2$ et $h \neq -2$.
- [ ] si et seulement si $h \neq 2, h \neq -2, h \neq 1/3$ et $h \neq 1/2$.
- [ ] pour toute valeur réelle de h.
- [ ] si et seulement si $h \neq 1/2$ et $h \neq 1/3$.

Question 18 : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations

(a) $\det A = 1$ **(b)** $AA^T = I_3$ **(c)** $A^3 = I_3$

lesquelles sont vraies?

- ■ (a), (b) et (c).
- ☐ seulement (a) et (c).
- ☐ seulement (b).
- ☐ seulement (a) et (b).

Question 19 : La dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ tels que } v_4 = 0 \right\}$$

est

- ☐ 4.
- ☐ 1.
- ■ 2.
- ☐ 3.

Question 20 : Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n \times n$ telles que $A \neq B$. Alors

- ☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes valeurs propres.
- ☐ AB n'est jamais diagonalisable.
- ■ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes vecteurs propres.
- ☐ AB est toujours diagonalisable.

Question 21 : Quel énoncé est vrai pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$?

- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au plus une solution.
- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au plus une solution au sens des moindres carrés.
- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution.
- ■ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution au sens des moindres carrés.

Question 22 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ h^3 - h \\ h^3 - 4h + 4 \end{pmatrix}$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors l'équation matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

possède une infinité de solutions

- ☐ pour $h = -2$, $h = 1$ et $h = 2$.
- ■ pour $h = -2$, $h = 0$ et $h = 2$.
- ☐ pour $h = -1$, $h = 0$ et $h = 1$.
- ☐ pour $h = -1$, $h = -1/2$ et $h = 1/2$.

Question 23 : Soit un paramètre $b \in \mathbb{R}$. Alors le polynôme $q(t) = bt - t^2$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ engendré par $p_1(t) = 1 + t + t^2$ et $p_2(t) = 2 - t + 3t^2$ lorsque

- ☐ $b = 1$.
- ☐ $b = -1$.
- ☐ $b = -3$.
- ■ $b = 3$.

Question 24 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) = 2$.
- ☐ $\dim(\operatorname{Ker} A) \neq 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) = 2$.
- ■ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) \neq 2$.
- ☐ $\dim(\operatorname{Ker} A) \neq 2$ et $\dim(\operatorname{Ker} B) \neq 2$.