

Durée : 144 minutes



# Algèbre linéaire

## Examen

### Partie commune

### Automne 2015

---

## Réponses

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

---

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2015.

---

## Notation

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\vec{x}$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème coordonnée de  $\vec{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- Pour  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire canonique est défini par  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$ .

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $5 \times 6$  et soit  $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$  un vecteur. L'ensemble des solutions de l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$  ne peut jamais être

- ☒ un ensemble fini non-vide.
- ☐ un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^6$  de dimension égale à 1.
- ☐ un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^6$  de dimension égale à 2.
- ☐ l'ensemble vide.

**Question 2 :** On considère un ensemble  $\mathcal{F}$  de polynômes  $p_1, \dots, p_5$ , tels que le degré de  $p_k$  est égal à  $k$  pour  $k = 1, \dots, 5$ . Alors

- ☐ on peut obtenir une base de  $\mathbb{P}_5$  en ajoutant le polynôme  $p(t) = t^5 - t$  à l'ensemble  $\mathcal{F}$ .
- ☐ on peut extraire une base de  $\mathbb{P}_5$  de l'ensemble  $\mathcal{F}$ .
- ☐ l'ensemble  $\mathcal{F}$  forme une base de  $\mathbb{P}_5$ .
- ☒ on peut obtenir une base de  $\mathbb{P}_5$  en ajoutant le polynôme  $p(t) = 5$  à l'ensemble  $\mathcal{F}$ .

**Question 3 :** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices inversibles de même taille. Si  $C = AB$  et  $D = A^T + B^T$ , alors

- ☐  $D$  est toujours inversible, mais  $C$  ne l'est pas forcément.
- ☐ aucune des deux matrices n'est nécessairement inversible.
- ☐  $C$  et  $D$  sont toujours inversibles.
- ☒  $C$  est toujours inversible, mais  $D$  ne l'est pas forcément.

**Question 4 :** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2h - 4 \\ -3 - h \end{pmatrix}$$

où  $h \in \mathbb{R}$  est un paramètre. Alors l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$

- ☒ possède une infinité de solutions pour  $h = 3$ .
- ☐ possède une infinité de solutions pour  $h = -3$ .
- ☐ possède un nombre fini de solutions pour toute valeur  $h \in \mathbb{R}$ .
- ☐ possède une infinité de solutions pour toute valeur  $h \neq \pm 3$ .

**Question 5 :** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . Parmi les quatre affirmations suivantes, trois sont équivalentes. Laquelle ne l'est pas ?

- ☐ L'ensemble des colonnes de  $A$  forme une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .
- ☒  $\det A = 1$ .
- ☐ L'ensemble des lignes de  $A$  forme une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .
- ☐  $AA^T = I_n$ .

**Question 6 :** Soit  $B$  une matrice de taille  $m \times n$  telle que  $BB^T = I_m$ . Alors,

- ☐ les colonnes de  $B$  forment un ensemble orthonormé.
- ☒ les lignes de  $B$  forment un ensemble orthonormé.
- ☐  $B^TB = I_n$ .
- ☐  $B$  est inversible.

**Question 7 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$ . Si  $A = PDP^T$  est une diagonalisation en base orthonormée, alors  $P$  peut s'écrire comme

- ☐  $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$ .
- ☐  $P = \begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ 12/13 & -5/13 \end{pmatrix}$ .
- ☒  $P = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ .
- ☐  $P = \begin{pmatrix} 12/13 & 5/13 \\ 5/13 & -12/13 \end{pmatrix}$ .

**Question 8 :** Il existe un polynôme  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$  avec des coefficients réels  $a_0, a_1, a_2$  tel que

$$p(-1) = 1, \quad p(0) = 1, \quad p(1) = 3, \quad p(2) = b,$$

- ☒ pour une seule valeur réelle de  $b$ .
- ☐ pour aucune valeur réelle de  $b$ .
- ☐ pour toute valeur réelle de  $b$ .
- ☐ pour un ensemble fini d'au moins deux valeurs réelles différentes de  $b$ .

**Question 9 :** L'aire du triangle ayant pour sommets les points

$$(0, 0), \quad (-1, 5), \quad (3, -1)$$

est égale à

- ☒ 7.
- ☐ 8.
- ☐ 16.
- ☐ 14.

**Question 10 :** Soient

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonale de  $\vec{x}$  sur le sous-espace  $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$  est:

☐  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$ 
☒  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$ 
☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ 
☐  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**Question 11 :** La valeur du paramètre  $b \in \mathbb{R}$  telle que le vecteur  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$  appartient

au plan de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  est:

- ☐  $b = 2.$   
☐  $b = -1.$   
☒  $b = -5.$   
☐  $b = -2.$

**Question 12 :** Soient  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ ,  $\vec{b}$  un vecteur dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\hat{b}$  la projection orthogonale de  $\vec{b}$  sur  $\text{Col } A$ . Alors,

- ☐ la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$  au sens des moindres carrés est  $A^{-1}\hat{b}$ .  
☐ la matrice  $A^T A$  est inversible.  
☒ chaque solution de  $A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$  est une solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$  au sens des moindres carrés.  
☐ l'équation  $A\vec{x} = \hat{b}$  possède une solution unique.

**Question 13 :** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{une matrice et} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

une base de l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille  $2 \times 2$ . La troisième coordonnée de la matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

- ☒ 9.  
☐ -3.  
☐ 2.  
☐ 1.

**Question 14 :** Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

est égal à

- ☐ 24.  
☐ 12.  
☐ -12.  
☒ -24.

**Question 15 :** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même taille. On suppose que  $B$  est une matrice inversible. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et aussi de  $B$ . Parmi les affirmations suivantes

- (a)  $\lambda$  est valeur propre de la matrice  $A + B$ ,  
(b)  $\lambda$  est valeur propre de la matrice  $AB$ ,  
(c)  $\lambda$  est valeur propre de la matrice  $BAB^{-1}$ ,  
(d)  $\lambda^2$  est valeur propre de la matrice  $BA$ ,

lesquelles sont toujours vraies?

- ☒ seulement (c).  
☐ (a), (c) et (d).  
☐ seulement (d).  
☐ (a) et (b).

**Question 16 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la factorisation  $LU$  de  $A$  (en utilisant seulement les opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en dessous). Alors l'élément  $\ell_{31}$  de  $L$  est égal à

- ☐ 2.  
☐ 3.  
☐ -1.  
☒ -2.

**Question 17 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si  $B = A^{-1}$ , alors l'élément  $b_{11}$  de  $B$  est égal à

☐  $-1$ .

☒  $-\frac{1}{5}$ .

☐  $\frac{1}{5}$ .

☐  $\frac{1}{3}$ .

**Question 18 :** Soient la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  et le vecteur  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ .

Alors la solution au sens des moindres carrés  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$  de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est telle que

☒  $\hat{x}_2 = 3$ .

☐  $\hat{x}_2 = -3$ .

☐  $\hat{x}_2 = 4$ .

☐  $\hat{x}_2 = -4$ .

**Question 19 :** On considère la transformation  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}_2$  donnée par

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = (c - b) + (a - 2b + c)t + (a - b)t^2$$

Alors

☐  $T$  est linéaire et son rang vaut 1.

☒  $T$  est linéaire et son rang vaut 2.

☐  $T$  est linéaire et son noyau est  $\{\vec{0}\}$ .

☐  $T$  n'est pas linéaire.

**Question 20 :** Soit  $h$  un paramètre réel. Les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de  $\mathbb{R}^4$

☐ seulement si  $h = 0$ .

☒ seulement si  $h \neq \frac{1}{2}$ .

☐ seulement si  $h = \frac{1}{2}$ .

☐ seulement si  $h \neq 0$ .

**Question 21 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} -x_1 & -2x_3 & = 0 \\ & x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ & -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- ☐ ne possède aucune variable libre.  
☐ possède deux variables libres.  
☒ possède une variable libre.  
☐ possède trois variables libres.

**Question 22 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

- ☐ la seule valeur propre de  $A$  est 2.  
☐ les valeurs propres de  $A$  sont 0, 2 et  $-2$ .  
☐ les valeurs propres de  $A$  sont 1,  $-1$ , 2 et  $-2$ .  
☒ les valeurs propres de  $A$  sont 2 et  $-2$ .

**Question 23 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐  $A$  possède trois valeurs propres distinctes.  
☐  $A$  est diagonalisable en base orthonormée.  
☐  $A$  est diagonalisable mais pas en base orthonormée.  
☒  $A$  n'est pas diagonalisable.

**Question 24 :** Soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformation linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}. \text{ Soit } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors la matrice  $M$  de  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ , telle que  $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = M[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , est:

☐  $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

☐  $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

☒  $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}.$

☐  $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

**Question 25 :** Le noyau de toute transformation linéaire surjective  $T: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est toujours de dimension 1.

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 26 :** Soit  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une transformation linéaire injective et soit  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  un ensemble linéairement indépendant de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_p)\}$  est un ensemble linéairement indépendant de vecteurs de  $\mathbb{R}^m$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 27 :** Soit  $p \in \mathbb{P}_n$  un polynôme et  $p'$  sa dérivée.  
L'ensemble  $\{p \in \mathbb{P}_n \mid p'(-1) \neq 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_n$ .

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 28 :** Si  $A$  est une matrice de taille  $4 \times 4$  de rang 1 et  $\lambda = 0$  est une valeur propre de  $A$  de multiplicité algébrique 3, alors  $A$  est diagonalisable.

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 29 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $7 \times 3$  dont les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes et la troisième colonne est égale à la première. Alors la matrice  $A^T A$  est une matrice carrée de taille  $3 \times 3$ , symétrique et de rang 2.

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 30 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Si  $B$  est obtenue à partir de  $A$  à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, alors  $\text{Col}(A^T) = \text{Col}(B^T)$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 31 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Si  $\vec{x} \in \text{Col}(A)$  est tel que  $A^T \vec{x} = \vec{0}$ , alors  $\|\vec{x}\| = 0$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 32 :** Soient  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et  $\lambda$  un nombre réel non nul. Si le système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  admet exactement une solution, alors l'ensemble des colonnes de la matrice  $(\lambda A)^T$  engendre  $\mathbb{R}^n$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX