Exercices — Série 8

Mots-clés: bases, dimension d'un (sous)-espace vectoriel, rang, théorème du rang, changement de base, matrice d'une transformation linéaire dans des bases.

Question 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes).

b) Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\dim \mathrm{Ker} A$.

c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathrm{Im} A$, $\mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Ker} A^T$, ainsi que du sous-espace $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Question 2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 3 Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k \in V$. Alors

- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V = k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.

Question 4 Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que:

- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 5$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 4$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 3$ et $\mathrm{rg}(A) = 4$

Question 5 Soit A la matrice de la projection orthogonale $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur le plan horizontal $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. Alors $\dim \mathrm{Ker}(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 6 Soit A une matrice inversible de taille 5×5. Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est vide
- ☐ Les lignes de A sont linéairement indépendantes
- ☐ Le rang de A est strictement plus petit que 5
- ☐ Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$

Question 7 Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Alors

- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$ et $\mathrm{rg}(T) = 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$ et $\mathrm{rg}(T) = 1$
- ☐ T n'est pas linéaire
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 2$ et $\mathrm{rg}(T) = 1$

Question 8 Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Une base du noyau de T est donnée par $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9

Soient $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ deux bases d'un espace vectoriel V. Supposons que $b_1 = 6c_1 - 2c_2$ et $b_2 = 9c_1 - 4c_2$.

(a) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

(b) Trouver $[x]_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a).

Soient $\mathcal{A} = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$ et $\mathcal{D} = (\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2})$ les bases de $\mathbb{R}^2$ définies par:

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{D}\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{D}$.

(d) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{A}\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{A}$.

Question 10

Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire définie par $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice $A = [T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ de T par rapport aux bases canoniques $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice $B = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Question 11

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

Soient $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Donner la matrice $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ qui représente T par rapport aux bases $\mathcal{E}$ (de départ) et $\mathcal{B}$ (d'arrivée).

b) Même question pour $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, dans les bases $\mathcal{B}$ (de départ) et $\mathcal{E}$ (d'arrivée).

c) Même question pour $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, les bases $\mathcal{B}$ (de départ) et $\mathcal{B}$ (d'arrivée).