Série 6

Mots-clés: espaces vectoriels, sous-espaces, combinaisons linéaires, espace engendré par des vecteurs, transformations linéaires entre espaces, noyau et image d'une transformation linéaire.

Question 1 Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (muni de la structure d'espace vectoriel vue en cours)?

a) Un cube plein dans $\mathbb{R}^3$, centré à l'origine.

b) La diagonale $\Delta = \{(x, x, \cdots, x) \in \mathbb{R}^n\}$.

c) Un sous-ensemble qui possède 2143 éléments.

d) La réunion de tous les axes de coordonnées.

e) L'ensemble des points à coordonnées entières.

Question 2 Soit $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces de V?

a) $V_1 = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$.

b) $V_2 = \{f \in V \mid f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

c) $V_3 = \{f \in V \mid f \text{ est bijective}\}$.

Question 3 Soit $\mathbb{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{P}_n$ sont des sous-espaces vectoriels?

a) L'ensemble $V_1 = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(1) = 0\}$.

b) L'ensemble V_2 de tous les polynômes de degré exactement n.

c) L'ensemble $V_3 = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(0) = 0\}$.

Question 4 Soit $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

a) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, i.e. des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c) L'ensemble des matrices de trace nulle.

d) L'ensemble des matrices de déterminant nul.

e) L'ensemble des matrices A telles que $A^4 = -I_n$.

Question 5 Soit V un espace vectoriel et $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in V$. Décrire explicitement le sous-espace $\mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ engendré par $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ dans les cas suivants:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $V = \mathbb{P}_3$, $\vec{v_1} = t$, $\vec{v_2} = t^2$, $\vec{v_3} = t^3$.

Question 6 On travaille dans $V = \mathbb{P}_3$.
Soient $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = t^3$, $p_3(t) = t^2 - t + 1$.
Est-ce que le polyôme $q(t) = t^3 - 2t + 1$ appartient à $\mathrm{Vect}(p_1, p_2, p_3)$?

Question 7 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier $n \geq 1$. Pour chacune des applications suivantes, déterminer et justifier si c'est une transformation linéaire. Dans l'affirmative déterminer son noyau et son image.

a) L'application déterminant $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) L'application trace $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

c) L'application dérivée $D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ qui associe à $p \in \mathbb{P}_n$ sa dérivée p'.

Question 8 Soient $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.
Déterminer si $\overrightarrow{w}$ est dans $\mathrm{Im}(A)$, dans $\mathrm{Ker}(A)$ ou bien dans les deux.

Question 9

1) Soit $T : \mathbb{R} \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ donnée par $T(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$
- ☐ T est linéaire et injective
- ☐ $\mathrm{Im}(T) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
- ☐ T n'est pas linéaire

2) Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$
- ☐ $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ n'engendrent pas V
- ☐ $\vec{v_2}$ engendre V.
- ☐ $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1})$.

3) Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x,y,z) = (x-y, y-z)$. Alors

- ☐ $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(T) = \Delta$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$