Exercices — Série 12

Mots-clés: Procédé de Gram-Schmidt, factorisation QR, méthode des moindres carrés, droite de régression.

Question 1
Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver la meilleure approximation de v par un vecteur de la forme $\alpha w_1 + \beta w_2$.

b) Calculer la distance entre v et $\text{Vect}\{w_1, w_2\}$.

Question 2 Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases des sous-espaces vectoriels de $W \subseteq \mathbb{R}^n$ suivants.

a) $W = \text{Vect}\{w_1, w_2\}$, avec $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $W = \text{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}$, avec $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Question 3 Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 4 Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $Ax = b$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

b) en utilisant la méthode QR lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 5

a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale.

b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.

c) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.

d) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Qu_1, \ldots, Qu_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Question 6
On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = ax + b$. Calculer a et b au sens des moindres carrés.

Question 7 Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	T_i $[°C]$	U_i $[V]$
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Question 8 Soit A une matrice de taille $m \times n$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker}(A^T A)$.

b) Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Question 9

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux.

a) L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$ coïncide avec l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

b) Soit A une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Le problème général des moindres carrés consiste à trouver un $x \in \mathbb{R}^n$ qui rend Ax aussi proche que possible de b.

☐ VRAI ☐ FAUX

c) Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^TA = R$.

☐ VRAI ☐ FAUX

d) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\hat{y}$ la projection orthogonale de $y \in \mathbb{R}^n$ sur W. Alors $\hat{y}$ dépend du choix de la base de W.

☐ VRAI ☐ FAUX

e) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

☐ VRAI ☐ FAUX

f) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $v \in W \cap W^\perp$, alors $v = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

g) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension $p \neq 0$, alors la méthode de Gram-Schmidt produit, à partir d'une base $\{w_1, \dots, w_p\}$ de W, une base $\{v_1, \dots, v_p\}$ de W avec $\|v_i\| = 1, \forall i \in \{1, \dots, p\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX