Exercices — Série 11

Mots-clés: produit scalaire, norme, orthogonalité, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, bases orthogonales/orthonormées, projections/matrices orthogonales.

Question 1

a) Soient $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$u \cdot v, \quad v \cdot w, \quad \frac{u \cdot w}{\|v\|}, \quad \frac{1}{w \cdot w} w, \quad \frac{u \cdot w}{\|v\|} v.$$

b) Calculer la distance entre u et v et la distance entre u et w.

c) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à u, v, w (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Question 2 Soit $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \text{Vect}\{v\}$. Donner l'ensemble $W^\perp$ des vecteurs orthogonaux à v. Est-ce que $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, de quelle dimension?

Question 3

a) Décrire l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $e_1 = (1, 0, 0)$, puis à $e_2 = (0, 1, 0)$, et enfin simultanément à e_1 et e_2. Idem avec e_1 et $e_3 = (0, 0, 1)$, puis e_2 et e_3. Combien il y a-t-il de vecteurs orthogonaux à e_1, e_2 et e_3 simultanément?

b) Trouver la projection orthogonale p du vecteur $a = (2, 2, 2)$ sur la droite engendrée par le vecteur $b = (-1, -2, -3)$.

c) Trouver la distance du vecteur a à la droite engendrée par b.

d) Montrer que $\|p\| = \|a\| \, |\cos\theta|$, où θ est l'angle formé par a et b.

Question 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $U = \mathrm{Ker}(A)$. Alors $U^\perp$ est égal à

☐ $\mathrm{Lgn}(A)$ ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ ☐ $\mathrm{Im}(A)$ ☐ $\mathbb{R}^3$

Question 5 Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Les vecteurs u_1 et u_2 sont orthogonaux.

☐ VRAI ☐ FAUX

b) La projection orthogonale $\mathrm{proj}_W(v)$ de v sur $W = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ est égale à

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Dans la décomposition $v = z + \mathrm{proj}_W(v)$, où $z \in W^\perp$, $z =$

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 6

Soient les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soit w la meilleure approximation de v par un vecteur de la forme $\alpha w_1 + \beta w_2$. Alors $w =$

☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

Question 7

a) Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le cosinus des angles formés par x avec les axes de coordonnées.

b) En déduire l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui forment le même angle avec les trois axes de coordonnées.

c) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs (a, b, c) et $(1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que pour tous nombres réels a, b et c on a

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

d) Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Notons par α, β et γ les angles formés par x avec les axes de coordonnées. En utilisant les points antérieurs, démontrer qu'on a les inégalités

$$-\sqrt{6} \leq \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \leq \sqrt{6}.$$

Question 8 Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (u_1|\ldots|u_n)$ et $V = (v_1|\ldots|v_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UVest inversible.

Question 9 Soit $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ A n'est pas inversible
- ☐ $A^T A = I_3$
- ☐ $\frac{A}{\sqrt{6}}$ est orthogonale
- ☐ A est orthogonale

Question 10 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est une base orthonormale.

☐ VRAI ☐ FAUX

b) Un ensemble $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.

☐ VRAI ☐ FAUX

c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général.

☐ VRAI ☐ FAUX

d) Si x n'appartient pas au sous-espace vectoriel W, alors $x - \mathrm{proj}_W(x)$ n'est pas nul.

☐ VRAI ☐ FAUX

e) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

☐ VRAI ☐ FAUX

f) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si v est dans W et dans $W^\perp$, alors $v = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

g) Si U est une matrice de taille $m \times n$ avec des colonnes orthonormales, alors $U^T U x = x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11

a) Montrer que la matrice de rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un réel quelconque, est orthogonale. Calculer $\det R$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

b) Montrer que la matrice de réflexion

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est orthogonale. Calculer $\det U$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

c) Montrer que toute matrice $n \times n$ de la forme $Q = I_n - 2uu^T$, où $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur unitaire (de norme 1), est orthogonale. Ces matrices sont appelées matrices de réflexion élémentaires. A l'aide d'un raisonnement géométrique, déterminer les valeurs propres et les espaces propres correspondants.