Série 7

Mots-clés: indépendance linéaire, familles génératrices, bases d'un espace vectoriel, coordonnées dans une base, dimension d'un espace vectoriel.

Question 1 Soit $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle et soit $f \in V$. Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

- ☐ S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(t) = 0\ \forall\ t \geq n$, alors f est le vecteur nul de V.
- ■ Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- ☐ Si $f(q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, alors f est le vecteur nul de V.
- ☐ S'il existe $t \in \mathbb{R}$ avec $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.

Solution: La seule bonne réponse est: Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.
Les autres affirmations sont toutes incorrectes pour la même raison. Il ne suffit pas de s'annuler en un point pour être le vecteur nul (ni en une infinité de points). La fonction nulle est la fonction constamment nulle, le polynôme nul est le polynôme 0, la suite nulle est la suite constamment nulle. Seuls ces vecteurs ont la propriété de ne pas modifier le vecteur auquel on les additionne.

Question 2 On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants?

(i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

(ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, avec $t \in \mathbb{R}$.

b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Solution:

a) i) Oui. En effet, $x_1p_1(t) + x_2p_2(t) + x_3p_3(t) = x_1(1 - t^2) + x_2t^2 + x_3t = t^2(x_2 - x_1) + x_3t + x_1 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

i.e. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

ii) Oui. En effet, $x_1(1+t+t^2) + x_2(t+t^2) + x_3t^2 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

et donc $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

b) Non, aucun des trois vecteurs ne permet d'engendrer un polynôme de degré égal à 3. Par exemple t^3 n'est pas une combinaison linéaire de p_1, p_2 et p_3. Plus tard on verra que $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ et il y a seulement trois vecteurs, donc ça ne peut pas être une base.

Question 3 On considère $p(t) = (1-t)(1+t)$ et $q(t) = (1+t)^2$ de $\mathbb{P}_2$. Alors

- ☐ $(1+t)p - (1-t)q$ est une combinaison linéaire de p et q.
- ■ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.
- ☐ Le polynôme $q - p$ est le polynôme nul.
- ☐ Les polynômes p et q forment une base de $\mathbb{P}_2$.

Solution: La seule bonne réponse est: Les polynômes p et q sont linéairement indépendants. En effet, bien que $(1+t)p + (1-t)q = 0$, ce n'est pas une combinaison **linéaire**, car dans une combinaison linéaire seuls des coefficients réels sont permis, pas des coefficients polynomiaux. Malgré cela ils ne sont pas assez nombreux pour former une base de $\mathbb{P}_2$. Enfin, le polynôme $q - p$ s'annule en 0, mais ce n'est pas le polynôme nul, c'est $2t + 2t^2$.

Question 4

a) On considère $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{b_1}, \vec{b_2})$ de $\mathbb{R}^2$, où $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Idem pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ où $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution:

a) Les coordonnées cherchées sont (c_1, c_2) avec $\vec{v} = c_1\vec{b_1} + c_2\vec{b_2}$:
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, on trouve $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

b) On résout $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{v}$ et on obtient $c_1 = -1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$.

Question 5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de Ker$A$ et de ImA.

Solution: On note $A = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$, avec $(\vec{v_i})_{1 \le i \le 4}$ colonnes de A. Les vecteurs $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont proportionnels à $\vec{v_1}$, donc ils sont superflus pour trouver une base de ImA. Les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_4}$ sont linéairement indépendants, ils constituent une base de Im(A).

L'espace Ker$A$ est constitué des vecteurs $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tels que $A\vec{x} = \vec{0}$. On a

$$A\vec{x} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + x_3\vec{v_3} + x_4\vec{v_4} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\vec{v_1} + x_4\vec{v_4},$$

ainsi $A\vec{x} = \vec{0}$ ssi $x_4 = 0$ et $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Par conséquent, x_2 et x_3 sont des variables libres du système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$. On obtient une base de Ker$A$ en choisissant successivement $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, puis $x_2 = 0$, $x_3 = 1$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Question 6 On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $[x]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur x dans cette base. Trouver le vecteur $\overrightarrow{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base canonique). Trouver les coordonnées $[y]_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution: Les coordonnées $[x]_{\mathcal{B}}$ de x dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de l'écriture de x comme combinaison linéaire des vecteurs de base b_1, b_2 et b_3.

Par conséquent, nous avons ici $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que

$$\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{b_1} + 0 \cdot \overrightarrow{b_2} - \overrightarrow{b_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on nous donne $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base standard, et il s'agit de trouver les coordonnées de $\overrightarrow{y}$ par rapport à la nouvelle base $\mathcal{B}$. C'est le calcul inverse du précédent. On cherche des nombres réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{b_1} + b\overrightarrow{b_2} + c\overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{y}$. Pour trouver a, b et c il suffit de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Le résultat est $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 7 Soit $W \subset \mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$.

On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.
- ■ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

Solution: La bonne réponse est: On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont proportionnels, ils sont donc linéairement dépendants et ne peuvent être complétés en une base. Par contre les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont linéairement indépendants, ils peuvent donc être complétées en une base de W. Le sous-espace W est donné par une équation à six inconnues. Cinq d'entre elles sont des inconnues secondaires qui jouent le rôle de paramètres, la dimension de W est donc 5.

Question 8 Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application "trace" définie par

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d.$$

Parmi les familles de matrices suivantes, laquelle forme une base de Ker(Tr)?

- ■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- □ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- □ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- □ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution: Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3. En effet pour avoir $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0$, il faut que $a + d = 0$, autrement dit que $d = -a$. Ainsi Ker(Tr) est égal au sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

qui est de dimension 3 car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en est une base évidente. Parmi les choix proposés, une base de ce sous-espace est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En effet les trois matrices ci-dessus sont linéairement indépendantes et appartiennent au noyau de Tr. Comme celui-ci est de dimension 3 il s'agit donc d'une base de Ker(Tr). Les autres familles ont 2 ou 4 vecteurs, donc ne sont pas des bases de Ker(Tr), tandis que l'autre famille avec 3 vecteurs est liée.

Question 9

a) Soit $W = \mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ où $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Trouver $\dim(W)$.

b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ tel que B soit une base de W.

c) Agrandir l'ensemble $\{\vec{v_1} + \vec{v_2}\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Solution:

a) Deux. En effet, les vecteurs $\vec{v_2}, \vec{v_3}$ sont linéairement indépendants, donc la dimension est au moins deux. Elle est inférieure ou égale à 2 car c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

b) $B = \{\vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ — c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. (Note: $\{\vec{v_1}, \vec{v_3}\}$ et $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ sont aussi possibles).

c) L'espace W est de dimension deux, donc n'importe quel vecteur non colinéaire à $\vec{v_1}+\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient. Par exemple, on peut proposer la base $\{\vec{v_1}+\vec{v_2}, \vec{v_1}\}$ de W.

Question 10 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.
- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.
- ■ $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.
- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

Solution: La bonne réponse est: $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. En effet la matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, pas de $\mathbb{R}^4$. Pour trouver sa dimension il faut échelonner la matrice A. Comme toutes les lignes sont proportionnelles le noyau de A est la solution de l'équation $-x + 3y = 0$, une droite dans le plan.