Série 6

Mots-clés: espaces vectoriels, sous-espaces, combinaisons linéaires, espace engendré par des vecteurs, transformations linéaires entre espaces, noyau et image d'une transformation linéaire.

Question 1 Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

a) Un cube plein dans $\mathbb{R}^3$, centré à l'origine.

b) La diagonale $\Delta = \{(x, x, \cdots, x) \in \mathbb{R}^n\}$.

c) Un sous-ensemble qui possède 2143 éléments.

d) La réunion de tous les axes de coordonnées.

e) L'ensemble des points à coordonnées entières.

Solution:

a) Le cube n'est pas un sous-espace vectoriel: Si x est un point sur le bord du cube alors $2x$ est à l'extérieur du cube.

b) C'est un sous-espace vectoriel: soient $u = (x, x, \ldots, x)$ et $v = (y, y, \ldots, y)$ dans Δ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u + v = (\lambda x + y, \ldots, \lambda x + y) \in \Delta$.

c) Tout espace vectoriel réel est soit l'espace trivial, soit infini: Si l'espace n'est pas trivial, il contient un élément $x \neq 0$. Mais alors il contient les éléments nx pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc il est infini. L'ensemble en question ne peut donc pas être un espace vectoriel.

d) Si $n \geq 2$ ce n'est pas un sous-espace vectoriel car (par exemple) il ne contient pas $e_1 + e_2$. Si $n = 1$ l'axe de coordonnée est égal à l'espace entier et donc c'est un sous-espace vectoriel.

e) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel: Le vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$ en fait partie mais pas $\frac{1}{2} \cdot (1, 0, \ldots, 0)$.

Question 2 Soit $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces de V?

a) $V_1 = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$.

b) $V_2 = \{f \in V \mid f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

c) $V_3 = \{f \in V \mid f \text{ est bijective}\}$.

Solution:

a) Soient $f, g \in V_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il faut vérifier que $\lambda f + g \in V_1$. Calculons: $(\lambda f + g)(0) = (\lambda f)(0) + g(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda f(1) + g(1) = (\lambda f + g)(1)$. Donc $\lambda f + g \in V_1$ et V_1 est bien un sous-espace vectoriel.

b) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel. L'opposé de la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$ n'est pas un élément de V_2.

c) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel: La fonction $0 \in V$ n'est pas bijective.

Question 3 Soit $\mathbb{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{P}_n$ sont des sous-espaces vectoriels?

a) L'ensemble $V_1 = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(1) = 0\}$.

b) L'ensemble V_2 de tous les polynômes de degré exactement n.

c) L'ensemble $V_3 = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(0) = 0\}$.

Solution:

a) V_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$. Si p et q sont deux éléments de cet ensemble alors $\lambda p + q$ en fait aussi partie puisque $(\lambda p + q)(1) = \lambda p(1) + q(1) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.

b) V_2 n'est pas un sous-espace vectoriel: Le polynôme 0 n'est pas dans cet ensemble.

c) V_3 est un sous-espace vectoriel. Si $p_1(0) = 0$ et $p_2(0) = 0$ alors $(\lambda p_1 + p_2)(0) = \lambda p_1(0) + p_2(0) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 4 Soit $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

a) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, i.e. des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c) L'ensemble des matrices de trace nulle.

d) L'ensemble des matrices de déterminant nul.

e) L'ensemble des matrices A telles que $A^4 = -I_n$.

Solution:

a) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ 0 & \lambda c + c' \end{pmatrix}$ qui est une matrice triangulaire supérieure. Donc c'est un sous-espace vectoriel.

b) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel: La matrice 0 n'est pas dans l'ensemble.

c) C'est un sous-espace vectoriel. Soient M, N de trace nulle et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il faut vérifier que la trace de $\lambda M + N$ est 0:

$$\mathrm{Tr}(\lambda M + N) = \mathrm{Tr}(\lambda M) + \mathrm{Tr}(N) = \lambda \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N) = 0.$$

d) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel. Par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont de déterminant nul mais leur somme est égal à la matrice I_2 qui est de déterminant 1.

e) C'est ensemble est vide! En effet si $A^4 = -I_n$ alors $\det(A^4) = \det(-I_n)$ et par les propriétés du déterminant on trouve $\det(A)^4 = -1$ ce qui n'est pas possible dans $\mathbb{R}$. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

Question 5 Soit V un espace vectoriel et $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in V$. Décrire explicitement le sous-espace $\text{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ engendré par $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ dans les cas suivants:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $V = \mathbb{P}_3$, $\vec{v_1} = t$, $\vec{v_2} = t^2$, $\vec{v_3} = t^3$.

Solution:

a) On constate d'abord que toute combinaison linéaire $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} + \gamma\vec{v_3}$ est un vecteur dont la troisième composante est nulle. On affirme ensuite que tout vecteur $\vec{v}$ du plan Oxy se trouve dans le sous-espace engendré par ces trois vecteurs. En effet l'équation vectorielle $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} + \gamma\vec{v_3} = \vec{v}$ a toujours une solution dans ce cas (écrire un système pour le voir). On conclut que $\text{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est le plan horizontal Oxy dans $\mathbb{R}^3$.

b) Une combinaison linéaire $\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 = t(\alpha + \beta t + \gamma t^2)$ est un polynôme de $\mathbb{P}_3$ sans terme constant. Autrement dit le sous-espace engendré par t, t^2 et t^3 est le sous-espace des polynômes qui sont multiples de t.

Question 6 On travaille dans $V = \mathbb{P}_3$.
Soient $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = t^3$, $p_3(t) = t^2 - t + 1$.
Est-ce que le polyôme $q(t) = t^3 - 2t + 1$ appartient à $\text{Vect}(p_1, p_2, p_3)$?

Solution:

On essaie de trouver les coefficients de la combinaison linéaire (s'ils existent) $q(t) = \alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t)$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha_1(1 - t) + \alpha_2 t^3 + \alpha_3(t^2 - t + 1) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3) + (-\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_3 t^2 + \alpha_2 t^3 \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit vraie, il faut que les coefficients de chaque monôme (les coefficients devant $1, t, t^2, t^3$) soient égaux. Donc on doit résoudre

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ce qui n'est pas possible car on devrait avoir $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_1 = 2$ (vu que $\alpha_3 = 0$). Donc $q(t)$ n'est pas dans le $\text{Vect}(p_1, p_2, p_3)$.

Question 7 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier $n \geq 1$. Pour chacune des applications suivantes, déterminer et justifier si c'est une transformation linéaire. Dans l'affirmative déterminer son noyau et son image.

a) L'application déterminant $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) L'application trace $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

c) L'application dérivée $D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ qui associe à $p \in \mathbb{P}_n$ sa dérivée p'.

Solution:

a) Si $n \geq 2$, ce n'est pas une transformation linéaire. Par exemple $\det(I_n + I_n) \neq \det(I_n) + \det(I_n)$.

b) C'est une transformation linéaire: $\mathrm{Tr}(\lambda M + N) = \mathrm{Tr}(\lambda M) + \mathrm{Tr}(N) = \lambda \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)$ pour tout $M, N \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le noyau de l'application trace est donné par $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. L'application Tr est surjective: en effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une matrice M telle que $\mathrm{Tr}(M) = \lambda$ (il suffit de prendre une matrice diagonale avec $M_{1,1} = \lambda$ et $M_{i,i} = 0$ pour $i > 1$). Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$.

c) C'est une transformation linéaire: La dérivée de $(\lambda p_1 + p_2)$ est $(\lambda p_1 + p_2)' = \lambda p_1' + p_2'$. Donc on a bien $D(\lambda p_1 + p_2) = \lambda D(p_1) + D(p_2)$.

   Le noyau de la dérivée est $\mathrm{Ker}(D) = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p'(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$. Or les seuls polynômes à dérivée nulle sont les polynômes constants, donc $\mathrm{Ker}(D) = \{c \mid c \in \mathbb{R}\}$. L'application dérivée baisse le degré d'un polynôme de 1. Ainsi cette application n'est pas surjective (par exemple $p(t) = t^n$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}(D)$). De plus, tout polynôme de degré $n-1$ est dans l'image de D: en effet si $q(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ en prenant $p(t) = \frac{a_{n-1}}{n}t^n + \cdots + \frac{a_1}{2}t^2 + a_0 t$ on a bien $D(p) = p'(t) = q(t)$. Donc $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{P}_{n-1}$.

Question 8 Soient $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.
Déterminer si $\overrightarrow{w}$ est dans $\mathrm{Im}(A)$, dans $\mathrm{Ker}(A)$ ou bien dans les deux.

Solution: Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est dans $\mathrm{Ker}(A)$: il s'agit d'un calcul $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est aussi dans $\mathrm{Im}(A)$ car le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$ est compatible (il suffit d'examiner la forme échelonnée réduite de sa matrice augmentée). Ainsi, il existe au moins un vecteur, par exemple $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$.

Question 9

1) Soit $T : \mathbb{R} \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ donnée par $T(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$
- ☐ $\mathrm{Im}(T) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
- ■ T est linéaire et injective
- ☐ T n'est pas linéaire

2) Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

- ■ $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$
- ☐ $\vec{v_2}$ engendre V.
- ☐ $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ n'engendrent pas V
- ☐ $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1})$.

3) Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$. Alors

- ☐ $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$
- ■ $\mathrm{Ker}(T) = \Delta$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

Solution:

1) T est linéaire et injective. En effet on voit facilement que $T(x) + T(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = T(x+y)$ et $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. De plus $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ de façon évidente.

2) On a que $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$. En effet $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff x + y + z = 0$, donc $z = -x - y$ de sorte que $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ceci montre que tout élément de V est combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

3) On a que $\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y, y - z) = (0, 0)\}$. Donc $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(T) \iff x = y = z$ donc $\mathrm{Ker}(T) = \Delta = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ (voir notation de la Question 1). Pour trouver l'image de T on regarde l'espace des colonnes de la matrice associée à T: on a que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \mathbb{R}^2$.