Série 5

Mots-clés: déterminants, matrices élémentaires, inversibilité.

Question 1
Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

L'idée est de développer par rapport à une ligne ou une colonne avec beaucoup de zéros pour faire le moins de calculs possible.

A: On développe par rapport à la 1ère colonne de A et on obtient

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.$$

B: On développe par rapport à la 2ème colonne de B et on trouve $\det B = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes égales), et donc $\det B = 0$.

C: En développant par rapport à la 3ème colonne on trouve $\det C = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes égales), et donc $\det C = 0$.

D: On développe par rapport à la 1ère colonne de D. On obtient

$$\det D = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

E: On développe par rapport à la 1ère colonne de E. On obtient

$$\det E = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 84.$$

Question 2

a) Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Solution:

a) La réponse est 11. Il est plus simple de développer par rapport à la deuxième ligne:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

b) Premier déterminant: 0 car la troisième ligne est la somme des deux premières. Second déterminant: a^3. On développe par rapport à la première ligne:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a+b & c \\ b & a \end{vmatrix} + -b \begin{vmatrix} a & c \\ a & a \end{vmatrix} = a(a^2+ab-bc) - b(a^2-ac) = a^3.$$

c) On a que $\det A = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ est indépendant de l'angle φ. Toutes les matrices de rotation vérifient la propriété $\det A = 1$.

d) Vu que les lignes de B sont linéairement dépendantes (la deuxième est le double de la troisième) on a que $\det B = 0$, donc $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$.

Question 3
Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution:

On trouve $\det A = 1$ (A ajoute à la quatrième ligne la troisième ligne multipliée par α), $\det B = -1$ (B échange les lignes 1 et 2) et $\det C = \alpha$ (C multiplie la première ligne par $\alpha \neq 0$).

Question 4
Étudier, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ ci-dessous, en calculant leur déterminant.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Solution:

Selon le cours, on sait que $A(\lambda)$ est inversible si et seulement si $\det(A(\lambda)) \neq 0$. Or, en développant selon la deuxième ligne, on a

$$\det(A(\lambda)) = (-1) \cdot (1 \cdot \lambda - 2 \cdot 0) = -\lambda \,.$$

On a donc que $A(\lambda)$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$.

On procède de même pour $B(\lambda)$ en développant selon la première ligne:

$$\det(B(\lambda)) = 5(1-\lambda) - 2\lambda - (-1)(-3\lambda) = 5 - 10\lambda$$

Ainsi $\det(B(\lambda)) = 5 - 10\lambda$, cette matrice est donc inversible si et seulement si $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

Question 5 Calculer le déterminant de la matrice ci-dessous, en la transformant progressivement à l'aide de transformations élémentaires.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 7\\ 2 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 4 & 1\\ 4 & 6 & 9 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 7\\ 0 & -3 & -16 & -9\\ 0 & 0 & -12 & -8\\ 0 & 0 & 5 & -9\end{pmatrix} =$$

$$= -12\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 7\\ 0 & -3 & -16 & -9\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{3}\end{pmatrix} = -444$$

Question 6

Soit a un paramètre réel et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix}a & 1 & 3\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Alors A est singulière (c'est-à-dire non inversible) si

- ☐ $a \notin \{1, 3\}$
- ■ $a \in \{1, -1\}$
- ☐ $a \in \{1, 3\}$
- ☐ $a \notin \{1, -1\}$

Solution: On calcule le déterminant de A et on trouve $\det(A) = -6(a^2 - 1)$. Ainsi, $\det(A) = 0$ (la matrice n'est pas inversible) si et seulement si $a = \pm 1$.

Question 7

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

- [ ] $\det(A) = 0$
- [ ] $\det(A) = 9$
- [x] $\det(A^{-1}) = \frac{1}{24}$
- [ ] $\det(A^T) = -24$

2) Soit A la matrice 2×2 d'une homothétie de rapport 4 dont le centre est l'origine. Alors

- [ ] $\det(A) = 4$
- [x] $\det(A) = 16$
- [ ] $\det(A) = 8$
- [ ] $\det(A) = 0$

3) Soit T l'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ obtenue en effectuant d'abord une symétrie axiale d'axe $x = y$, puis la projection orthogonale sur l'axe $x = 0$. Soit A la matrice 2×2 de cette application linéaire.

- [ ] $\det(A) = 1$
- [x] $\det(A) = 0$
- [ ] $\det(A) = -2$
- [ ] $\det(A) = -1$

4) Soit A une matrice de taille 5×5. On change le signe de chaque coefficient pour obtenir la matrice B. Alors on a

- [x] $\det(A) = -\det(B)$
- [ ] $\det(B) = 0$
- [ ] $\det(A) = \det(B)$
- [ ] $\det(A) = 5\det(B)$

Solution:

1) On a $\det(A) = 24$ (produit des coefficients diagonaux), donc aussi $\det(A^T) = 24$. Par contre $\det(A^{-1}) = \frac{1}{24}$.

2) La matrice A est diagonale, égale à $4I_2$. Ainsi $\det(A) = 4 \cdot 4 = 16$.

3) Cette application n'est pas inversible. En effet le vecteur $\overrightarrow{e_2}$ est transformé en $\overrightarrow{e_1}$ par la symétrie axiale, puis en $\overrightarrow{0}$ par la projection sur l'axe $x = 0$ (qui est l'axe vertical). Le système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ a donc une solution non nulle. Par conséquent $\det(A) = 0$.

4) Par linéarité du déterminant comme fonction de chaque ligne, le déterminant change de signe chaque fois que l'on multiplie une ligne par (-1). On change ici le signe de chacune des cinq lignes si bien que $\det(A) = -\det(B)$.

Question 8 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si B est obtenue en échangeant deux lignes de A, alors $\det(B) = \det(A)$.

b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det(A) = 0$.

c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A.

d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.

e) Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det(A) = 0$.

f) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.

g) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det(A) = 2$ et $\det(B) = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.

h) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.

i) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Solution:

a) Faux. Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A, alors $\det(B) = -\det(A)$ en général. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $\det(A) = 1$ et $\det(B) = -1$.

b) Vrai. Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors la matrice A n'est pas inversible et par un résultat du cours on a que $\det(A) = 0$.

c) Faux. Le déterminant de A n'est pas égal au produit des éléments diagonaux de A comme le montre l'exemple de la matrice B ci-dessus.

d) Faux. Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors $\det(A)^{13} = 0$ et donc $\det(A) = 0$ ce qui montre que A n'est pas inversible.

e) Vrai. Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det(A) = -\det(A)$ (en échangeant les deux lignes qui sont égales) et donc $\det(A) = 0$.

f) Faux. Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = \det(A)^3 = 2^3 = 8 \neq 6$.

g) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $\det(A) = 2$ et $\det(B) = 5$, tandis que $\det(A + B) = 18$.

h) Vrai. Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors en développant successivement par rapport à la 1ère ligne, 2ème, jusqu'à la n-ème on obtient bien le produit des éléments de sa diagonale.

i) Vrai. Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$. En effet, la matrice kA s'obtient en multipliant chaque ligne de A par le nombre k. Puisqu'il y a n lignes on aura donc multiplié le déterminant de A par $\underbrace{k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ fois}} = k^n$.

Question 9

a) Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

Solution:

a) L'aire cherchée est égale à $\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right| = |3 - 8| = |-5| = 5$.

b) Le volume cherché est égal à $\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = 4$.