Série 4

Mots-clés: calcul matriciel, produit de matrices, puissance d'une matrice carrée, transposée, inverse d'une matrice carrée, matrices élémentaires.

Question 1

Considérons les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent).
Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA

b) AA^T, A^TA, BA^T, BC^T, C^TA, BD^T, D^TB

Solution:

a) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, AC n'existe pas: $(2 \times 3) \times (2 \times 2)$,

$CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$,

CB n'existe pas: $(2 \times 2) \times (3 \times 2)$,

CD n'existe pas: $(2 \times 2) \times (3 \times 1)$,

$EC = \begin{pmatrix} 9 & 15 \end{pmatrix}$, $EA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, BA^T n'existe pas: $(3 \times 2) \times (3 \times 2)$,

$BC^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, $C^TA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,

BD^T n'existe pas: $(3 \times 2) \times (1 \times 3)$, $D^TB = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Question 2

a) On se donne
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$
Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

b) Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T.

Solution:

a) On a $AB = BA$ pour $k = 9$ seulement. On voit que c'est une condition nécessaire en calculant les coefficients $(1,2)$ des deux matrices. On trouve respectivement $12 - 4k$ et -24. On s'assure ensuite que les autres coefficients sont égaux pour ce choix de k.

b) On calcule les deux produits matriciels MN et NT. On trouve dans les deux cas $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$. Ceci donne un nouvel exemple de l'impossibilité de simplifier un produit matriciel en "divisant par M", le problème étant bien sûr qu'on ne peut pas diviser par une matrice (en général).

Question 3 Soit $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2\left(T_1(\vec{x})\right)$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée?

Solution:

a) $T_1(\boldsymbol{e}_1) = T_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_1(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi la composition $T_2 \circ T_1$ correspond à $A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On a $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$. Le domaine d'arrivée est $\mathbb{R}$.

Question 4 Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces, $T_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \underset{T_{\dots}}{\to} \mathbb{R}^{\cdots} \underset{T_{\dots}}{\to} \mathbb{R}^{\cdots}$.

a) AB, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution:

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $T_{AB} : \mathbb{R}^3 \underset{T_B}{\to} \mathbb{R}^2 \underset{T_A}{\to} \mathbb{R}^3$.

b) $ABC = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$, $\vec{T}_{ABC} : \mathbb{R}^2 \underset{T_C}{\to} \mathbb{R}^3 \underset{T_B}{\to} \mathbb{R}^2 \underset{T_A}{\to} \mathbb{R}^2$.

c) $ABC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T_{ABC} : \mathbb{R}^3 \underset{T_C}{\to} \mathbb{R}^3 \underset{T_B}{\to} \mathbb{R} \underset{T_A}{\to} \mathbb{R}^3$.

Question 5

a) Dans le plan, soit S la symétrie axiale d'axe $x = -y$. Décrire son inverse s'il existe. Quelles sont les matrices de ces applications?

b) Même question pour H l'homothétie de rapport 3.

c) Même question pour R_θ la rotation d'angle θ centrée en l'origine.

Solution:

a) L'inverse de S est l'application S elle-même. La matrice associée est

$$S = S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) L'inverse de H est une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$. Les matrices associées sont

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) L'inverse de R_θ est $R_{-\theta}$. Les matrices associées sont

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On a bien $R_\theta \cdot R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 6

a) Déterminer les matrices élémentaires 3×3 suivantes :

- E_1, qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes;
- E_2, qui multiplie la deuxième ligne par 8;
- E_3, qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.

b) Les matrices E_1, E_2 et E_3 sont elles inversibles ? Pourquoi ? Si oui, donner leur inverse et l'inverse du produit $E_1\,E_2\,E_3$.

c) A quelle opération élémentaire chacune de ces matrices suivantes se rapporte-t-elle?

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution:

(1) On a

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Chaque matrice est inversible car chaque opération élémentaire possède son propre inverse :

$$E_1 = E_1^{-1}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$(E_1E_2E_3)^{-1} = E_3^{-1}E_2^{-1}E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) E_1 : Multiplier à gauche par cette matrice correspond à ajouter k fois la deuxième ligne à la troisième.

E_2 : Cette matrice multiplie la deuxième ligne par k.

E_3 : Cette matrice permute les deux premières lignes.

E_4 : Cette matrice permute la première et la troisième ligne.

Question 7 On considère les matrices élémentaires de taille 4×4.

a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.

b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.

c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.

d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a, b et c.

Solution:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

d) Pour inverser la transformation associée à A, on considère la même transformation qui permute les lignes 2 et 4, ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à B, on considère la transformation qui soustrait cinq fois la ligne 1 à la ligne 3, ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à C, on considère la transformation qui divise la ligne 3 par 17, ainsi $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 8

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Solution: La matrice A est une matrice *carrée* de dimension 4×4. Il suffit de la mettre sous forme échelonnée pour voir qu'elle a 4 pivots :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Un théorème du cours montre que A est inversible.

La matrice B est carrée et de dimension 4×4. De plus B est déjà sous forme échelonnée, on voit donc directement qu'elle a 4 pivots et donc qu'elle est inversible.

Si on transpose la matrice C on trouve :

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

La transposée de C est donc une matrice carrée de dimension 4×4 qui a 4 pivots. Donc C^T est inversible. Donc C est inversible.

Par contre la matrice D est de dimension 4×3 et ne peut pas être inversible.

Question 9

a) Est-ce que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible? Si oui calculer son inverse.

b) Trouver les solutions du système homogène $Ax = 0$.

c) Trouver les solutions du système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution:

a) Oui, on le voit en échelonnant la matrice augmentée $\left(A \,|\, I_3\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ainsi $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Comme A est inversible, l'unique solution de $A\vec{x} = \vec{0}$ est $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Comme A est inversible, la seule solution à ce système est $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Question 10 Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c la matrice A ci-dessous est-elle inversible?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

Donner l'inverse de A lorsque cela est possible.

Solution: Une forme échelonnée de A est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1-c^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi A est inversible si et seulement si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq \pm 1$. Son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-c^2} & -\frac{c}{1-c^2} \\ 0 & 0 & -\frac{c}{1-c^2} & \frac{1}{1-c^2} \end{pmatrix}$$

Question 11 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soient A, B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$.

■ Faux □ Vrai

b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi.

□ Faux ■ Vrai

c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible.

■ Faux □ Vrai

d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible quel que soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

□ Faux ■ Vrai

e) Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors A est inversible si et seulement si A^k est inversible.

□ Faux ■ Vrai

Solution:

a) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Alors on a

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

tandis que

$$(AC)B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$, alors il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Ces équations, lues de droite à gauche, disent que la matrice A^{-1} est aussi inversible et que son inverse vaut A, ainsi $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) Faux. Si A et B sont inversibles, d'inverses respectifs A^{-1} et B^{-1}, alors le produit AB est inversible et son inverse vaut $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En effet

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n = (B^{-1}A^{-1})(AB)$. Donc le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ est toujours inversible.

d) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une (unique) solution qui est $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

e) Vrai. En effet supposons A inversible et soit B son inverse (donc tel que $AB = BA = I_n$). Prenons $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors on a

$$A^k B^k = A \cdots AB \cdots B = I_n = B^k A^k$$

et donc A^k est inversible et son inverse est $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$. Réciproquement, supposons que A^k soit inversible et soit C telle que $A^k C = I_n$. Puisque $k \geq 1$ on a que $A \cdot A^{k-1}C = I_n$ on en déduit que $A^{k-1}C$ est l'inverse (à droite) de A. Par un résultat du cours A est inversible.

Question 12

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- [x] Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
- [ ] Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
- [ ] Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- [ ] Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- [x] Si A est inversible alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
- [ ] Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.
- [ ] Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- [ ] Alors $(AB)^T = A^T B^T$.

c) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

- [x] Si C est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- [ ] Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
- [ ] Si $AC = BC$, alors $A = B$.
- [ ] Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.

Solution:

a) Si AB est inversible, alors l'application linéaire représentée par AB est bijective. On en déduit que B est injective et A est surjective, donc A, B sont bijectives, donc inversibles, vu que ce sont des matrices carrées. Ainsi, si A ou B n'est pas inversible, AB n'est pas inversible. Pour voir que la somme de matrices inversibles n'est pas toujours inversible, prendre $A = I$ et $B = -I$. Puis, il est vrai que si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, mais l'inverse est donné par $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) La formule correcte est $(AB)^T = B^T A^T$ et donc on a $(AB)^T = BA$ dans ce cas-ci. Ceci élimine deux réponses. En cours on a vu que A est inversible si et seulement si A^T l'est. L'égalité $A = A^T$ dit seulement que la matrice est symétrique.

c) Pour voir que les points 1, 2 et 4 sont faux, prendre, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point 3 est vrai, car si on applique C^{-1} à droite de chaque côté de l'équation $AC = BC$, on obtient $A = B$.