# Série 1

**Mots-clés**: Systèmes linéaires, matrices associées, opérations élémentaires, colonnes-pivots, algorithme de Gauss-Jordan

## Question 1

Sur une balance à deux plateaux on place des billes, des cubes et des pyramides (tous les objets d'une même forme ont le même poids). La balance est équilibrée quand il y a 7 billes à gauche et 6 cubes et 2 pyramides à droite ainsi qu'avec 4 pyramides à gauche et 1 cube et 1 bille à droite.

i) Écrire un système linéaire qui traduit ces informations et le résoudre.

ii) Si l'on connaît le poids de l'un de ces objets peut-on en déduire le poids des deux autres?

**Solution:**

i) Notons $b$ (respectivement $c$ et $p$) le poids d'une bille (resp. d'un cube et d'une pyramide). Le problème se traduit par les équations $7b = 6c + 2p$ et $4p = c + b$. On a donc le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 7b & -6c & -2p & = & 0 \\ -1b & -1c & 4p & = & 0 \end{cases}$$

En prenant les variables dans l'ordre $b, c, p$ on obtient une matrice associée au système: $\begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. En échelonnant et en réduisant cette matrice on trouve:

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_1+7L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -13 & 26 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -13 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{-L_1 \\ -\frac{L_2}{13}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{L_1-L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la forme échelonnée réduite et on y lit facilement les solutions: $b = 2p = c$. La solution générale de ce système s'écrit donc:

$$S = \left\{ \left( c, c, \frac{c}{2} \right) \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Il s'agit d'une droite dans $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $(1, 1, \frac{1}{2})$ et passant par le point $(0, 0, 0)$.

ii) Ainsi, d'après i), le système possède une infinité de solutions et on voit clairement qu'en connaissant le poids d'un des objets on en déduit aisément le poids des deux autres.

Note: Si $c$ est négatif ou nul, le problème n'a plus d'interprétation physique plausible (pas de poids négatif ou nul).

**Question 2** Trouvez tous les nombres de 3 chiffres qui augmentent de 270 quand on intervertit les deux premiers chiffres à gauche et qui diminuent de 99 quand on intervertit l'ordre des chiffres extrêmes.

**Solution:** Soit $n$ le nombre cherché. Notons par $x, y, z$ le chiffre des centaines, des dizaines et des unités de $n$ respectivement. Remarque: Comme $x, y, z$ sont des chiffres, ils peuvent prendre des valeurs dans l'ensemble {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} uniquement. On a donc $n = 100x + 10y + z$. La donnée du problème se traduit par le système suivant:

$$\begin{cases} 100y + 10x + z &= 100x + 10y + z + 270 \\ 100z + 10y + x &= 100x + 10y + z - 99 \end{cases}$$

Cela s'écrit comme

$$\begin{cases} 90x - 90y + 270 &= 0 \\ 99x - 99y - 99x &= 0 \end{cases}$$

Ou en simplifiant: $\begin{cases} x - y &= -3 \\ x - z &= 1 \end{cases}$.

On trouve alors facilement que $x = z + 1$ et $y = z + 4$. Ce système a donc une infinité de solutions:

$$S = \left\{(z + 1, z + 4, z) \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\right\}$$

Par contre, pour répondre à la question initiale, on doit prendre des valeurs de $z$ dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (pourquoi pas $\{6, 7, 8, 9\}$?) et nous avons donc *six* solutions possibles: 140, 251, 362, 473, 584, 695.

**Question 3**
Considérons le système linéaire à 3 équations et 2 inconnues

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$$

i) Est-ce que le système est compatible?

ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

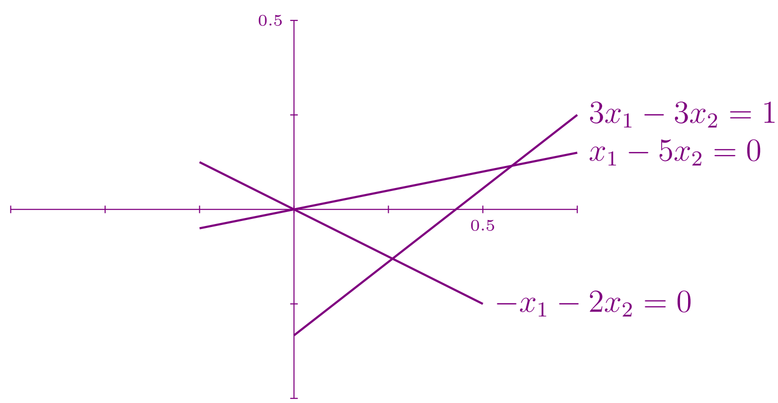
**Solution:**

i) En utilisant des opérations sur les équations, on voit que le système est incompatible. En effet, en sommant les deux premières équations on obtient $-7x_2 = 0$ ce qui donne $x_2 = 0$ et en remplaçant dans la troisième on trouve $x_1 = \frac{1}{3}$. Mais le couple $(\frac{1}{3}, 0)$ ne satisfait ni la première ni la seconde équation. Donc le système n'a pas de solution.

Autre méthode: Le système a pour matrice augmentée $\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$ et pour forme échelonnée réduite $\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Comme la dernière colonne est une colonne-pivot, on a que ce système ne possède pas de solution.

ii) Si on dessine les trois droites sur le plan, on peut voir qu'elles ne se rencontrent pas en un seul point.




## Question 4

En considérant les variables dans l'ordre $x, y, u, v, w$, quelle est la matrice augmentée du système ci-contre?

$$\begin{cases} w + 2x - y &= 4 \\ -y + x &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{cases}$$

- [ ] $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$
- [x] $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right)$
- [ ] $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$
- [ ] $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right)$

**Solution:** Il suffit d'ordonner les variables selon l'ordre choisi, cela donne un système égal au précédent: $\begin{cases} 2x - y \quad +w &= 4 \\ x - y &= 3 \\ 3x - 2y \quad +w &= 7 \\ 7x + 2u + 4v \quad +w &= 7 \end{cases}$ et l'on voit la matrice associée à ce système.

**Question 5**

A l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan, résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} w + 2x - y &= 4 \\ -y + x &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{cases}$$

**Solution:** En utilisant les variables dans l'ordre $x, y, u, v, w$, on peut écrire la matrice augmentée suivante (vue à l'exercice précédent), que l'on échelonne:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{L_4 \to L_4 - 7L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\overset{L_3 \to L_3 - 3L_1}{\sim}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 1 & -14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 1 & -14 \end{array}\right) \underset{L_4 \to L_4 - 7L_2}{\overset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{L_4 \to \frac{L_4}{2}}{}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\overset{L_4 \leftrightarrow L_3}{}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{L_1 \to L_1 + L_2}{}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cela est équivalent au système:

$$\begin{cases} x + w = 1 \\ y + w = -2 \\ u + 2v - 3w = 0 \end{cases}$$

qui a comme solutions

$$x = 1 - w, y = -2 - w, u = 3w - 2v,$$

où $v$ et $w$ sont des nombres réels quelconques (il y a donc une infinité de solutions). Pour mieux voir géométriquement ces solutions on les écrit sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un plan dans $\mathbb{R}^5$ passant par le point $(1, -2, 0, 0, 0)$. Il y a deux *paramètres*, $v$ et $w$, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On dit aussi qu'on a deux degrés de liberté.

Si on avait fait le choix (probablement plus logique) d'ordonner les inconnues par ordre alphabétique, la matrice du système sera différente et sa forme échelonnée et réduite également:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et la forme paramétrique de la solution générale est alors, pour toutes valeurs réelles de $v$ et $y$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Question 6

Soit $a \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan, déterminer les valeurs du paramètre $a$ pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z &= a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z &= a - a^2 \\ x + y + z &= 1 - a \end{cases}$$

a) n'admet aucune solution,

b) admet une infinité de solutions,

c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

**Solution:** On écrit la matrice augmentée du système, en échangeant la première et la dernière ligne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ a & 1-a & 1-a & a^2 \\ a & 1+a & 1+a & a-a^2 \end{array}\right) \underset{L_3\to L_3-aL_1}{\overset{L_2\to L_2-aL_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \end{array}\right) \underset{L_3\to L_3-(1-2a)L_2}{\overset{L_1\to L_1-L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. On distingue les cas:

- Si $a \neq 0$ et $a \neq 1/2$, le nombre $2a^2 - a$ est non nul. La dernière équation ne peut être vérifiée et le système ne possède pas de solutions. On écrit alors $S = \varnothing$ pour dire que l'ensemble des solutions est vide.

- Si $a = 0$ ou $a = 1/2$, la dernière équation donne $0 = 0$. Il reste alors deux équations à trois inconnues et la forme échelonné réduite possède deux pivots. On a toujours $x = 1 - a$ et $y = -z$ et en choisissant $z$ comme inconnue libre et on obtient:

  $$S = \left\{(1-a, -z, z) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}$$

  Le système possède une droite entière de solutions.

**Question 7**
Laquelle des colonnes de la matrice suivante *n'est pas* une colonne-pivot?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- [ ] la quatrième
- [ ] la première
- [x] la troisième
- [ ] la deuxième

**Solution:**

Dans cet exercice à choix multiple il s'agit d'effectuer des opérations sur les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{L_2\leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_3-L_1 \\ L_4-L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_3-2L_2 \\ L_4-2L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On voit donc que c'est la troisième colonne qui ne contient pas de pivot. Remarquons qu'il y a des choix plus économiques pour échelonner et réduire cette matrice, si on avait voulu résoudre le système associé (ce qui n'est pas le cas).

**Question 8** Le système linéaire suivant où $a$ est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x+2y+2z &= 1 \\ 2y+2z &= 1-2a \\ 2x+4ay+2z &= 1 \\ 4x+4ay+2z &= 1+2a \end{cases}$$

- ☐ ne possède aucune solution lorsque $a \neq \frac{1}{2}$
- ■ possède une infinité de solutions lorsque $a = \frac{1}{2}$
- ☐ ne possède aucune solution lorsque $a = \frac{1}{2}$
- ☐ possède une solution unique lorsque $a = \frac{1}{2}$

**Solution:** On écrit la matrice augmentée et on travaille:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 2 & 4a & 2 & 1 \\ 4 & 4a & 2 & 1+2a \end{array}\right) \underset{L_4\to L_4-2L_1}{\overset{L_3\to L_3-L_1}{\frown}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & 4a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a-4 & -2 & 2a-1 \end{array}\right) \underset{L_4\to L_4-2aL_2}{\overset{L_3\to L_3-2aL_2}{\frown}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & -2 & -4a & -2a+4a^2 \\ 0 & -4 & -2-4a & 4a^2-1 \end{array}\right) \underset{L_4\to L_4+2L_2}{\overset{L_3\to L_3+L_2}{\frown}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & 0 & 2(1-2a) & (1-2a)^2 \\ 0 & 0 & 2(1-2a) & (1-2a)^2 \end{array}\right)$$

On distingue alors deux cas:

- Si $(1-2a)=0$, c'est-à-dire $a=\frac{1}{2}$, alors on a les équations: $2x+2y+2z=1$ ainsi que $2y+2z=0$, ce qui donne les solutions $x=\frac{1}{2}$, $y=-z$ (infinité de solutions paramétrées par $z\in\mathbb{R}$).

- Si $(1-2a)\neq 0$, alors la dernière équation donne $z=\frac{1-2a}{2}$. On trouve ensuite $y=0$ et, finalement, $x=a$. Dans ce cas, le système possède une seule solution.

Deux remarques:

(1) Lors d'un examen il n'est pas nécessaire de trouver les solutions explicitement si elles ne sont pas demandées. Il suffit de se rendre compte que la

matrice augmentée du système sous sa forme échelonnée ne contient aucune ligne dont le pivot se trouve dans la colonne des termes de droites (les $b_i$) pour conclure le système a toujours au moins une solution (ce qui élimine les réponses 2 et 4).

(2) Dans ce cas, il a été judicieux de ne pas diviser la première ligne de la matrice par deux, ce qui aurait fait apparaître des fractions et aurait rendu les calculs plus durs.

**Question 9**

1) Un système linéaire peut avoir exactement 12197 solutions.

- [x] Faux
- [ ] Vrai

2) Deux systèmes linéaires qui ont les mêmes ensembles de solutions ont des matrices associées qui sont égales.

- [x] Faux
- [ ] Vrai

3) Une matrice échelonnée et réduite de taille $4 \times 5$ possède 4 colonnes-pivots.

- [ ] Vrai
- [x] Faux

4) Une matrice de taille $9 \times 18$ possède au maximum 9 colonnes-pivots.

- [x] Vrai
- [ ] Faux

5) Si un système de $m$ équations à $n$ inconnues possède exactement 2 solutions, alors

- [ ] aucune équation du système n'est linéaire
- [x] au moins une des $m$ équations n'est pas linéaire.

**Solution:**

1) Faux. En effet, nous avons vu en cours qu'un système linéaire (à coefficients réels) peut avoir: aucune solution, une solution unique, ou une infinité de solutions.

2) Faux. En effet les systèmes $\begin{cases} x & +y & = & 0 \\ x & -2y & = & 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x & +2y & = & 0 \\ x & -2y & = & 1 \end{cases}$ ont clairement les mêmes solutions mais les matrices associées ne sont pas égales.

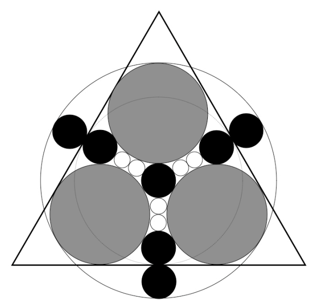
3) Faux. En effet la matrice de taille $4 \times 5$ suivante $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée et réduite et ne possède que 3 colonnes-pivots.

4) Vrai. En effet, il peut y avoir au maximum une position-pivot par ligne et comme il y a 9 lignes, le nombre de colonnes-pivots ne peut pas dépasser 9.

5) Un système linéaire ne peut pas possèder 2 solutions, donc cela signifie que *au moins* une des équations n'est pas linéaire.

**Question 10** [Tanabe Shigetoshi, 1865]

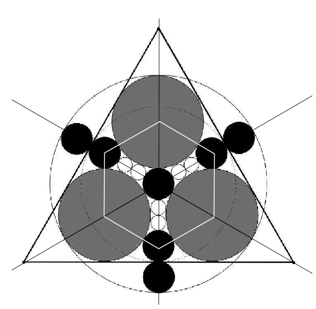
On considère un triangle équilatéral de côté $a$ et on suppose que des cercles sont agencés comme sur la figure ci-contre (6 cercles blancs, 3 gris et 7 noirs). Exprimer les rayons des cercles gris, noirs et blancs en fonction de $a$.



*Indication.* On note $r$ le rayon du cercle *inscrit* au triangle, $g$, $n$, $b$ les rayons des cercles gris, noirs, blancs respectivement. Écrire $r$ en fonction de $g, n, b$ de 3 façons possibles. À la fin utiliser le fait que $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. *Astuce:* Il y a un hexagone régulier caché dans cette figure

**Solution:** Notons encore par $R$ le rayon du grand cercle tangent aux cercles noirs et déssinons l'hexagone caché:

On exprime $r$ de trois manières différentes.



(1) On observe que $r = 3n + 4b$.

(2) On observe que $R = n+2g$ et que $R = r+2n$ d'où $r = 2g - n$.

(3) L'hexagone sur la figure donne $g+n = r-n$.

On obtient alors le système $\left\{\begin{array}{rcl} 3n+4b & = & r \\ 2g-n & = & r \\ g+2n & = & r \end{array}\right.$ et après résolution, on trouve

$$b=\frac{1}{10}r=\frac{\sqrt{3}}{60}a,\ n=\frac{1}{5}r=\frac{\sqrt{3}}{30}a \text{ et } g=\frac{3}{5}r=\frac{\sqrt{3}}{10}a.$$

Remarque: l'hexagone blanc dans la figure est bel et bien régulier, en effet, les cercles gris et noirs étant tangents, les rayons respectifs au point de tangence sont alignés et donc la distance entre deux sommets consécutifs de l'hexagone est égale à la somme des rayons respectifs, soit $g+n$.