Exercices — Série 11

Mots-clés: produit scalaire, norme, orthogonalité, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, bases orthogonales/orthonormées, projections/matrices orthogonales.

Question 1

a) Soient $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$u \cdot v, \quad v \cdot w, \quad \frac{u \cdot w}{\|v\|}, \quad \frac{1}{w \cdot w} w, \quad \frac{u \cdot w}{\|v\|} v.$$

b) Calculer la distance entre u et v et la distance entre u et w.

c) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à u, v, w (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Solution:

a) $u \cdot v = 7$, $v \cdot w = 10$, $\frac{u \cdot w}{\|v\|} = \frac{39}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{w \cdot w} w = \frac{1}{61} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{u \cdot w}{\|v\|} v = \frac{39}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\|u - v\| = \sqrt{17}$, $\|u - w\| = 3$.

c) Notation: pour $v \in \mathbb{R}^n$ on pose $\widetilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$ le vecteur unitaire correspondant. Alors $\widetilde{u} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{w} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Question 2 Soit $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \text{Vect}\{v\}$. Donner l'ensemble $W^\perp$ des vecteurs orthogonaux à v. Est-ce que $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, de quelle dimension?

Solution: $W^\perp = \left\{ w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3a + 2b + c = 0 \right\}$. En fait $W^\perp$ est le noyau de la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $w \mapsto v \cdot w$. Il s'agit donc d'un espace vectoriel. La transformation T est non nulle (par exemple $v \cdot v > 0$) donc de rang 1. Par le théorème du rang, la dimension de $W^\perp$ est donc $3-1=2$, il s'agit d'un plan (appelé le plan orthogonal au vecteur v).

Question 3

a) Décrire l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à $e_1 = (1,0,0)$, puis à $e_2 = (0,1,0)$, et enfin simultanément à e_1 et e_2. Idem avec e_1 et $e_3 = (0,0,1)$, puis e_2 et e_3. Combien il y a-t-il de vecteurs orthogonaux à e_1, e_2 et e_3 simultanément?

b) Trouver la projection orthogonale p du vecteur $a = (2,2,2)$ sur la droite engendrée par le vecteur $b = (-1,-2,-3)$.

c) Trouver la distance du vecteur a à la droite engendrée par b.

d) Montrer que $\|p\| = \|a\|\,|\cos\theta|$, où θ est l'angle formé par a et b.

Solution:

a) Tout vecteur de la forme $(0,u_2,u_3)$ est orthogonal à $(1,0,0)$. Donc l'ensemble des vecteurs orthogonaux à e_1 est le plan yz. De même, les vecteurs orthogonaux à $(0,1,0)$ forment le plan xz. Les vecteurs qui sont orthogonaux à la fois à $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ sont de la forme $(0,0,u_3)$. Ils sont sur l'axe des z.

De façon similaire, les vecteurs orthogonaux à $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ sont sur l'axe des y, tandis que les vecteurs orthogonaux à $(0,0,1)$ et $(0,1,0)$ sont sur l'axe des x.

Le seul vecteur orthogonal à e_1, e_2 and e_3 est $(0,0,0)$.

b) Le vecteur p est donné par la formule : $p = \mathrm{proj}_b(a) = \frac{a\cdot b}{\|b\|^2} b = (-12/14)b = (-6/7)b = (6/7, 12/7, 18/7)$.

c) La distance de a à la droite engendrée par b est égale à la distance de a à p, ainsi elle vaut: $\sqrt{(2-6/7)^2 + (2-12/7)^2 + (2-18/7)^2} = 2\sqrt{3/7}$.

d) $\|p\| = \frac{|a\cdot b|}{\|b\|^2}\|b\| = \frac{|a\cdot b|\|b\|}{\|b\|^2} = \frac{(\|a\|\|b\|\,|\cos\theta|)\|b\|}{\|b\|^2} = \|a\|\,|\cos(\theta)|$.

Question 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $U = \mathrm{Ker}(A)$. Alors $U^\perp$ est égal à

■ $\mathrm{Lgn}(A)$ □ $\mathrm{Ker}(A)$ □ $\mathrm{Im}(A)$ □ $\mathbb{R}^3$

Solution: Nous avons vu en cours que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Lgn}(A)^{\perp}$ et que $(W^{\perp})^{\perp} = W$ pour tout sous-espace W. Donc $\mathrm{Ker}(A)^{\perp} = (\mathrm{Lgn}(A)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Lgn}(A)$.

Question 5 Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Les vecteurs u_1 et u_2 sont orthogonaux.

■ VRAI ☐ FAUX

b) La projection orthogonale $\mathrm{proj}_W(v)$ de v sur $W = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ est égale à

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Dans la décomposition $v = z + \mathrm{proj}_W(v)$, où $z \in W^{\perp}$, $z =$

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution:

a) Un calcul direct donne $u_1 \cdot u_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$.

b) Comme u_1 et u_2 sont orthogonaux on peut utiliser la formule vue en cours:

$$\mathrm{proj}_W(v) = \frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{6}{3} u_1 + \frac{-3}{2} u_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) $v = z + \mathrm{proj}_W(v)$, où $\mathrm{proj}_W(v)$ est calculé dans b),

et z est donné par $z = v - \mathrm{proj}_W(v) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut vérifier que $z \cdot u_1 = z \cdot u_2 = 0$, c'est-à-dire $z \in W^{\perp}$.

Question 6

Soient les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soit w la meilleure approximation de v par un vecteur de la forme $\alpha w_1 + \beta w_2$. Alors $w =$

- ☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$
- ■ $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

Solution: Soit $W = \text{Vect}\{w_1, w_2\}$. La meilleure approximation $w = \alpha w_1 + \beta w_2$ de v correspond à la projection orthogonale $\text{proj}_W(v)$.

Attention, ici w_1 et w_2 ne sont pas orthogonaux ($w_1 \cdot w_2 \neq 0$), on ne peut donc pas utiliser la formule comme à l'exercice ci-dessus. On utilise donc la définition de projection orthogonale: La projection orthogonale $\text{proj}_W(v)$ est le seul vecteur w vérifiant $w \in W$ et $v - w \in W^\perp$:

$$\begin{cases} (w - v) \cdot w_1 = 0 \\ (w - v) \cdot w_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha w_1 \cdot w_1 + \beta w_2 \cdot w_1 = v \cdot w_1 \\ \alpha w_1 \cdot w_2 + \beta w_2 \cdot w_2 = v \cdot w_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases}.$$

La solution est $\alpha = -1/2$, $\beta = 4/3$. Par conséquent,

$$w = -\frac{1}{2} w_1 + \frac{4}{3} w_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Question 7

a) Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le cosinus des angles formés par x avec les axes de coordonnées.

b) En déduire l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui forment le même angle avec les trois axes de coordonnées.

c) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs (a, b, c) et $(1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que pour tous nombres réels a, b et c on a

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

d) Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Notons par α, β et γ les angles formés par x avec les axes de coordonnées. En utilisant les points antérieurs, démontrer qu'on a les inégalités

$$-\sqrt{6} \leq \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \leq \sqrt{6}.$$

Solution: Pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ notons par α, β et γ les angles formés par x et les 3 axes de coordonnées respectivement.

a) Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On sait que, par la formule de projection orthogonale sur les axes de coordonnées, on a $x \cdot e_1 = \|x\|\|e_1\| \cos(\alpha)$. De là on trouve $\|x\| \cos(\alpha) = x_1$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{x_1}{\|x\|}$. De même on a que $\cos(\beta) = \frac{x_2}{\|x\|}$ et $\cos(\gamma) = \frac{x_3}{\|x\|}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha = \beta = \gamma$. Alors $\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma)$ et par conséquent $x_1 = x_2 = x_3$.

c) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour (a, b, c) et $(1, 1, 1)$ et on trouve $|a + b + c| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{3}$. On élève le tout au carré pour trouver la formule souhaitée.

d) Par le point ci-dessus on a

$$|\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)| \leq \sqrt{3}\sqrt{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma)}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)| &\leq \sqrt{3}\sqrt{3 - (\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma))} \\ &= \sqrt{3}\sqrt{3 - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\|x\|^2}} = \sqrt{3(3-1)} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Question 8 Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (u_1| \ldots |u_n)$ et $V = (v_1| \ldots |v_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UVest inversible.

Solution:

$$U^T U = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \cdots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \cdots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \cdots & u_n^T u_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Comme $v_1, \ldots, v_n$ vérifient les mêmes hypothèses, on a également $V^T V = I_n$. UV est inversible car $V^T U^T UV = V^T V = I_n$, d'où $(UV)^{-1} = V^T U^T$.

Question 9 Soit $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ A n'est pas inversible
- ☐ $A^T A = I_3$
- ■ $\frac{A}{\sqrt{6}}$ est orthogonale
- ☐ A est orthogonale

Solution: Les colonnes de A sont orthogonales mais pas orthonormées. Un simple calcul donne $A^T A = \sqrt{6} I_3$, donc $\frac{A}{\sqrt{6}}$ est orthogonale.

Question 10 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est une base orthonormale.

☐ VRAI ■ FAUX

b) Un ensemble $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.

■ VRAI ☐ FAUX

c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général.

■ VRAI ☐ FAUX

d) Si x n'appartient pas au sous-espace vectoriel W, alors $x - \text{proj}_W(x)$ n'est pas nul.

■ VRAI ☐ FAUX

e) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

☐ VRAI ■ FAUX

f) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si v est dans W et dans $W^\perp$, alors $v = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

g) Si U est une matrice de taille $m \times n$ avec des colonnes orthonormales, alors $U^T U x = x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

■ VRAI ☐ FAUX

Solution:

a) Faux. Pour que des vecteurs forment une base orthonormale il faut qu'ils soient de norme 1 (en plus d'être orthogonaux deux à deux).

b) Vrai. Deux vecteurs orthogonaux non nuls sont linéairement indépendants.

c) Vrai. Dans une base orthonormale $(b_1, \dots, b_n)$ les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et non nuls (car ils ont une norme égale à 1), donc linéairement indépendants. Il s'agit donc aussi d'une base orthogonale.

d) Vrai. Si $x - \text{proj}_W(x) = 0$ cela signifie que $x = \text{proj}_W(x)$ et donc $x \in W$.

e) Faux. Un ensemble orthonormal possède des vecteurs 2 à 2 orthogonaux et non nuls (car de norme 1). Ces vecteurs sont donc linéairement indépendants!

f) Vrai. Si $w \in W \cap W^\perp$ alors $w \cdot w = 0$ et donc $w = 0$.

g) Vrai. On a vu en cours que, pour A de taille $m \times n$ le produit matriciel $A^T A$ se calcule facilement à l'aide de produits scalaires des colonnes de A: plus pécisément, le coefficient $(A^T A)_{i,j}$ est égal à $a_i^T \cdot a_j$ où a_i désigne la i-ème colonne de A. Donc si les colonnes de U sont orthonormales on a que $u_i^T \cdot u_j = 0$ si $i \neq j$ et $u_i^T \cdot u_j = 0$ si $i = j$. Donc $U^T U = I_n$.

Question 11

a) Montrer que la matrice de rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un réel quelconque, est orthogonale. Calculer $\det R$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

b) Montrer que la matrice de réflexion

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est orthogonale. Calculer $\det U$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

c) Montrer que toute matrice $n \times n$ de la forme $Q = I_n - 2uu^T$, où $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur unitaire (de norme 1), est orthogonale. Ces matrices sont appelées matrices de réflexion élémentaires. A l'aide d'un raisonnement géométrique, déterminer les valeurs propres et les espaces propres correspondants.

Solution:

a) On vérifie que $RR^T = I$, c'est-à-dire que $R^{-1} = R^T$, et R est une matrice orthogonale avec $\det R = 1$. Les valeurs propres sont $1, \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ et une base de vecteurs propres est donnée par exemple par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) $UU^T = I$, et donc U est une matrice orthogonale, $\det U = -1$. Les valeurs propres sont 1 (avec multiplicité algébrique 2) et -1. Des vecteurs propres correspondants sont

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) On a

$$Q^T = I_n^T - 2(uu^T)^T = I_n - 2uu^T,$$

et donc

$$QQ^T = (I_n - 2uu^T)(I_n - 2uu^T) = I_n - 4uu^T + 4uu^T uu^T.$$

Or

$$uu^T uu^T = u(u^T u)u^T = u \cdot 1 \cdot u^T = uu^T,$$

d'où $QQ^T = I_n$, et Q est une matrice orthogonale.

Cette matrice de réflexion élémentaire aura pour valeurs propres 1 et -1 et si notre intuition géométrique est correcte, il y aura une droite renversée par Q et un hyperplan de dimension $n-1$ fixé par Q.

On a, puisque $u^T u = 1$,

$$Qu = (I_n - 2uu^T)u = u - 2uu^T u = u - 2u = -u.$$

Donc, u est un vecteur propre pour la valeur propre -1. Pour un vecteur v orthogonal à u, on a $u \cdot v = u^T v = 0$ et on obtient

$$Qv = (I_n - 2uu^T)v = v - 2uu^T v = v.$$

Comme il y a $(n-1)$ vecteurs linéairement indépendants et orthogonaux à u, Q possède un espace propre E_1 de dimension $(n-1)$.

Remarque. La matrice U du point précédent est un cas particulier de matrice de réflexion élémentaire, avec $n = 3$ et

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$