Exercices — Série 10

Mots-clés: valeurs et vecteurs propres, espaces propres, diagonalisation.

Question 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les valeurs propres de A.
2) Calculer les vecteurs propres de A.
3) Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
4) (Optionnel) Calculer A^{1000}.

Solution:

1) Un simple calcul nous donne le polynôme caractéristique de A:

$$C_A(t) = (t+1)(t-5)\,.$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

2) On cherche d'abord le(s) vecteur(s) propre(s) associé(s) à λ_1, c'est-à-dire les vecteurs $\vec{v}$ satisfaisant $A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$, en résolvant

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,.$$

(On *sait* que ce système doit posséder une infinité de solutions) On trouve que tous les vecteurs propres sont colinéaires à $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ On trouve de même que tous les vecteurs propres associés à λ_2 sont colinéaires à $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Soit $P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice en question. On calcule:

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Appelons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ cette matrice. Il s'agit de la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A, *placées dans le même ordre que les vecteurs propres correspondants.* On a donc *diagonalisé* la matrice A.

4) Comme vu en classe, la diagonalisation permet de calculer les grandes puissances de A de manière directe. Comme $P^{-1}AP = D$, on a $A = PDP^{-1}$, et

$$\begin{aligned} A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 5^{1000} \end{pmatrix} (-\tfrac{1}{3}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{1000}+2 & 2\cdot 5^{1000}-2 \\ 5^{1000}-1 & 2\cdot 5^{1000}+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Question 2

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution:

A) Non. Calculons tout d'abord les valeurs propres de la matrice. Le polynôme caractéristique est donné par

$$C_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2$$

Ainsi la seule valeur propre est 0. D'autre part l'espace propre associé est donné par $E_0 := \{v \in \mathbb{R}^2 | Av = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$, et donc $\dim(E_0) = 1 < 2$. Ce qui montre que A n'est pas diagonalisable.

B) Oui. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$. Les valeurs propres de B sont distinctes, donc une famille avec un vecteur propre pour λ_1 et un vecteur propre pour λ_2 est linéairement indépendante, et constitue une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, B est diagonalisable.

C) Oui. Les valeurs propres de C sont $4, 5, 5$ (obtenues en cherchant les racines du polynôme caractéristique). Comme $\lambda = 5$ est de multiplicité 2, il faut vérifier que la dimension de l'espace propre associé est aussi 2. On calcule:

$$C - 5I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, et la colonne 2 est nulle, d'où $\mathrm{rg}(C - 5I_3) = 1$. Par conséquent, $\dim \mathrm{Ker}(C - 5I_3) = 3 - 1 = 2$, et la matrice C est diagonalisable.

D) Oui. Le polynôme caractéristique de D est

$$C_D(t) = -t^3 + 36t = -t(t-6)(t+6).$$

Les valeurs propres sont donc $0, -6, 6$. Elles sont distinctes donc D est diagonalisable.

Remarque: le théorème spectral que l'on verra plus tard, stipule que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Question 3

a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.

b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Solution:

a) Si $\vec{v}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on a

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

La valeur propre λ est non nulle car la matrice A est inversible. On multiplie à gauche par $\lambda^{-1}A^{-1}$, et on obtient

$$\lambda^{-1}\vec{v} = A^{-1}\vec{v},$$

d'où le résultat.

b) Le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$ étant égal au déterminant de la transposée $(A-\lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$, les matrices A et A^T ont donc le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres (qui sont les racines du polynôme caractéristique).

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ et les vecteurs propres associés sont $\vec{v}_1 = (2\ \ 1)^T, \vec{v}_2 = (-2\ \ 1)^T$. Par contre les vecteurs propres correspondants de la matrice A^T sont $\vec{v}_1 = (1\ \ 2)^T, \vec{v}_2 = (-1\ \ 2)^T$.

Remarque: bien sûr, si A est symétrique, les vecteurs propres de A et A^T sont les mêmes.

Question 4 Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.

☐ VRAI ■ FAUX

b) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

☐ VRAI ■ FAUX

c) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.

☐ VRAI ■ FAUX

d) Si 0 est valeur propre, alors $\operatorname{rg}(A) < n$.

■ VRAI ☐ FAUX

e) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$.

■ VRAI ☐ FAUX

Solution:

a) Faux. En effet la matrice identité est diagonale donc diagonalisable, et pourtant sa seule valeur propre est 1.

b) Faux. Méthode 1: La matrice nulle est diagonalisable mais non inversible.

Méthode 2: On peut aussi proposer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale donc diagonalisable, mais non inversible.

c) Faux (pour $n \geq 2$). En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, mais non diagonalisable, car l'espace propre associé à la valeur propre 1 (de multiplicité 2) est de dimension seulement 1.

d) Vrai. Si 0 est valeur propre, la dimension du noyau est non nulle, et donc $\mathrm{rg}\,(A) = n - \dim \mathrm{Ker} A < n$.

e) Vrai. A et $B = P^{-1}AP$ représentent la même transformation linéaire, donc elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités).
Remarque: si on note $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ les vecteurs propres de B, alors les vecteurs propres de A sont $P\vec{v}_1, P\vec{v}_2, \ldots$.

Question 5
On considère la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x, y) = (10x + 12y, -8x - 10y)$$

1) Donner la matrice A canoniquement associée à T (c'est-à -dire selon la base canoniques de $\mathbb{R}^2$).

2) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de A.

3) Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A.

4) (Optionnel) Calculer A^{15}.

Solution:

1) La matrice canoniquement associée à T est

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

2) Nous commençons par calculer le polynôme caractéristique de A

$$\begin{aligned} C_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 10 - t & 12 \\ -8 & -10 - t \end{pmatrix} \\ &= t^2 - 4 \\ &= (t-2)(t+2), \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\{-2, 2\}$. Nous avons deux valeurs propres distinctes, il suffit maintenant de trouver un vecteur propre pour chaque valeurs propres: L'équation $Av = 2v$ nous donne

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation $Av = -2v$ quant à elle implique

$$E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

3) En prenant $x = 1$ dans les deux espaces propres, on obtient la base ordonnée suivante

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right).$$

On peut vérifier que c'est bel et bien une famille libre et génératrice. Remarque: on a choisi de mettre en premier un vecteur propre associé à -2, de sorte que dans la matrice diagonale D qui suit on met d'abord -2 puis 2 sur la diagonale.

4) Comme vu au cours, puisque A possède "suffisamment" de vecteurs propres, i.e. il existe une base de $\mathbb{R}^2$ composée de vecteurs propres de A. Alors nous avons

$$A = SDS^{-1},$$

où $S := (v_1\ v_2)$ est la matrice construite en mettant deux vecteurs propres côte à côte, et D est la matrice diagonale composée par les valeurs propres de A, *dans le même ordre que celui des vecteurs propres*. Explicitement nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

on déduit par suite que

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 2^{15} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Question 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trouver le polynôme caractéristique de A.

b) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de A

c) Montrer que A est diagonalisable.

d) Donner une formule pour A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Solution:

a) On a $C_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = \cdots = -t^2(t-3)$.

b) Nous reprenons le même raisonnement utilisé plus haut. Les valeurs propres sont $\{0, 3\}$, la matrice est de rang 1 puisque toute ses lignes sont générée par une seule ligne, ceci implique que $\dim(E_0) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 2$ et donc $\dim(E_3) = 1$. Pour trouver les espaces propres nous devons résoudre les équations suivantes

$$Av = 0 \text{ et } Av = 3v,$$

après calculs nous obtenons

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Nous avons $\dim E_0 + \dim E_3 = 2 + 1 = 3$, ce qui prouve que A est bien diagonalisable.

d) Si on prend S la matrice formée par les vecteurs propres de A trouvés ci-dessus (dans l'ordre choisi) alors on a

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En prenant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les valeurs propres sont placées sur la diagonale selon l'ordre des vecteurs choisis au-dessus) on a $A = SDS^{-1}$ et donc $A^k = SD^kS^{-1}$ ou encore

$$A^k = S \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

En effectuant les calculs on obtient

$$A^k = S \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3^{k-1}A = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque: Nous aurions pu trouver ce dernier résultat bien plus directement: il suffit de remarquer que $A^2 = 3A$ *ce qui donne le résultat par récurrence.*