Série de révision (Corrigé)

Cette série contient des exercices de révision relatifs aux chapitres 1 à 7.

Exercice 1 (Applications linéaires)

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Sol.:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *, injective (les colonnes sont linéairement indépendantes). Non surjective, car seulement deux vecteurs ne peuvent engendrer* $\mathbb{R}^3$*. Donc non bijective.*

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *, surjective (l'image est* $\mathbb{R}$*), non injective (plus de colonnes que de lignes). Donc non bijective.*

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *, injective, surjective et bijective (en permutant les lignes 1 et 3, on trouve la matrice identité).*

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *, rien (non injective car* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *est envoyé sur zéro, et non surjective, car les vecteurs de l'image satisfont* $x_1 = x_2$*).*

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *, injective, surjective et bijective.*

f) T n'est pas une transformation linéaire, il est impossible de la représenter canoniquement par une matrice.

Exercice 2 (Preuve)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Montrer qu'une condition nécessaire pour que T soit bijective est $n = m$.

Sol.:

Supposons T bijective. Considérons A la matrice canonique associée à T. Comme T est surjective (l'image de T recouvre tout $\mathbb{R}^m$), l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, et les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$, ainsi on a $n \geq m$. Comme T est injective, l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ possède uniquement la solution triviale, ce qui signifie que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Ceci implique $n \leq m$. On a donc $n = m$.

Exercice 3 (Solution générale)

Déterminer la solution générale (si elle existe) des systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + 4z - 2u &=& 1 \\ x + 3y - 2z + 2u &=& 4 \\ 3x + 4y + 2z &=& 0 \\ x - 2y + 6z - 4u &=& 7 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} x + z &=& 0 \\ 2x + y + u &=& -5 \\ x + 2y - u &=& 2 \\ y + z + u &=& 1 \end{array}\right.$

Sol.:

Exercice 4 (Système avec paramètres)

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour que le système associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right)$$

a) ne possède pas de solution,

b) possède une solution unique,

c) possède une infinité de solutions.

Sol.:

- *Si $a = 0$, la matrice augmentée devient*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{4}L_2}{\widetilde{}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & b \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - bL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\widetilde{}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

Ainsi,
  - *si $b \neq 2$, le système n'a pas de solution et*
  - *si $b = 2$, le système possède deux variables libres (x et y) et une infinité de solutions*

$$\begin{cases} x, y \text{ quelconques} \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } s, t \in \mathbb{R}.$$

- *Si $a \neq 0$, la matrice augmentée devient*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\widetilde{}} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\widetilde{}} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{array}\right)$$

  - *Si $b = 2$, le système possède une variable libre (z) et une infinité de solutions*

$$\begin{cases} ax \qquad + 2z = 2 \\ \qquad ay + 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{a} z \\ y = \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{a} z \end{cases} \qquad \text{avec } z \text{ quelconque}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2}{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

  - *Si $b \neq 2$, le système possède une solution unique*

$$\begin{cases} ax \qquad + \qquad bz = 2 \\ \qquad ay + (4-b)z = 2 \\ \qquad\qquad\qquad z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{2-b}{a} \\ y = \dfrac{b-2}{a} \\ z = \quad 1 \end{cases}$$

En résumé, le système

a) ne possède pas de solution si $a = 0$ et $b \neq 2$,

b) possède une solution unique si $a \neq 0$ et $b \neq 2$,

c) possède une infinité de solutions si $b = 2$. Lorsque $a \neq 0$ la solution dépend d'un paramètre et lorsque $a = 0$, elle dépend de deux paramètres.

Exercice 5 (Applications linéaires)

Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires (justifier avec la définition) et donner la matrice associée lorsque cela est possible :

a) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \sin x$

b) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad x \longmapsto (x, x^2)$

c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad (x, y) \longmapsto (x + y\,,\ 2x - 3y)$

d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad (x, y, z) \longmapsto (2x - z\,,\ x + y)$

e) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad (x, y, z, u) \longmapsto (2x + u\,,\ y - z + 1)$

Sol.:

a) L'application $T(x) = \sin x$ n'est pas linéaire car

$$T(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = T(\pi) = \sin \pi = 0$$
$$T(\tfrac{\pi}{2}) + T(\tfrac{\pi}{2}) = \sin \tfrac{\pi}{2} + \sin \tfrac{\pi}{2} = 2 \neq 0$$

b) L'application $T(x) = (x, x^2)$ n'est pas linéaire car

$$T(\lambda x) = (\lambda x\,,\ \lambda^2 x^2)$$
$$\lambda T(x) = \lambda(x, x^2) = (\lambda x\,,\ \lambda x^2) \neq T(\lambda x) \qquad \textit{sauf si } \lambda = 1 \textit{ ou } \lambda = 0.$$

c) L'application $T(x, y) = (x+y\,,\ 2x-3y)$ est linéaire. En effet, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ nous avons

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ 2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ (2x_1 - 3y_1) + (2x_2 - 3y_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 - 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ 2x_2 - 3y_2 \end{pmatrix}$$
$$= T(\vec{u}) + T(\vec{v})\,,$$
$$T(\lambda \vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ 2\lambda x_1 - 3\lambda y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 - 3y_1 \end{pmatrix} = \lambda T(\vec{u})\,.$$

Comme $T(1, 0) = (1, 2)$ et $T(0, 1) = (1, -3)$, la matrice associée à T est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

d) L'application $T(x, y, z) = (2x - z\,,\ x + y)$ est linéaire (calcul analogue à celui de la partie c)). Comme $T(1, 0, 0) = (2, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1)$ et $T(0, 0, 1) = (-1, 0)$, la matrice associée à est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) L'application $T(x, y, z, u) = (2x + u\,,\ y - z + 1)$ n'est pas linéaire car

$$T(0, 0, 0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0)\,.$$

Exercice 6 (Calcul matriciel)

a) On se donne
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$
Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

b) Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T.

Sol.:

1. *On a $AB = BA$ pour $k = 9$ seulement. On voit que c'est une condition nécessaire en calculant les coefficients $(1,2)$ des deux matrices. On trouve respectivement $12 - 4k$ et -24. On s'assure ensuite que les autres coefficients sont égaux pour ce choix de k.*

2. *On calcule les deux produits matriciels MN et NT. On trouve dans les deux cas $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$. Ceci donne un nouvel exemple de l'impossibilité de simplifier un produit matriciel en "divisant par M", le problème étant bien sûr qu'on ne peut pas diviser par une matrice (en général).*

Exercice 7 (Application linéaire)

Soit h un nombre réel et D la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$. On définit une application $T : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$ par $T(A) = D \cdot A$.

1. Déterminer si T est linéaire (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
2. Déterminer si T est surjective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
3. Déterminer si T est injective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

Indication. Traiter le cas où D est inversible pour résoudre une équation de type $D \cdot A = B$.

Sol.: *L'application T est linéaire, nous avons vu en cours que la multiplication matricielle est distributive (compatibilité avec la somme) et compatible avec l'action.*

Puisque $\det D = h + 4$, *la matrice D est inversible pour $h \neq -4$. On traite ce cas d'abord et on s'occupera du cas $h = -4$ par la suite.*

Lorsque D est inversible, l'équation $D \cdot A = B$ est équivalente à l'équation
$$A = I \cdot A = D^{-1} \cdot D \cdot A = D^{-1} \cdot B$$

Ainsi T est surjective puisque toute matrice B est obtenue comme $T(D^{-1}\cdot B)$. De plus T est injective puisque la seule matrice A qui est envoyée sur zéro est la matrice $D^{-1}\cdot(0)=(0)$.

Il reste à traiter le cas où $h=-4$. Ici T est donnée par la formule

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 2a-4c & 2b-4d \end{pmatrix}$$

On voit ici que les deux lignes de la matrice TA sont proportionnelles, ce qui signifie que T ne peut être surjective. Une matrice qui n'a pas cette propriété n'est pas de la forme TA. Par exemple il n'existe aucune matrice A telle que $TA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette application n'est pas injective non plus puisque $T\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (Déterminants)

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Sol.:

a) 11. Il est plus simple de développer par rapport à la deuxième ligne.

b) Premier déterminant : 0 car la troisième ligne est la somme des deux premières. Second déterminant : a^3.

c) $\det A=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ *est indépendant de l'angle φ. Toutes les matrices de rotation vérifient la propriété* $\det A=1$.

d) $\det B = 0$, *donc* $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$.

Exercice 9 (Forme échelonnée réduite et rang)

Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis calculer leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol.: *Après réduction, on trouve que A et B sont équivalentes, respectivement, aux matrices*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 0 & 7/15 \\ 0 & 0 & 1 & -11/15 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} B = 3$.

Exercice 10 (Diagonalisation)

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A. *Oui car A est déjà diagonale.*

B. *Oui. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$. Les valeurs propres de B sont distinctes, donc une famille avec un vecteur propre pour λ_1 et un vecteur propre pour λ_2 est linéairement indépendante, et constitue une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, B est diagonalisable.*

C. *Oui. Les valeurs propres de C sont $4, 5, 5$ (obtenues en cherchant les racines du polynôme caractéristique). Comme la valeur propre 5 est de multiplicité 2, il faut vérifier si la dimension de l'espace propre associé est aussi 2. On calcule :*

$$C - 5I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, et la colonne 2 est nulle, d'où $\operatorname{rang}(C - 5I_3) = 1$. *Par conséquent,* $\dim \operatorname{Ker}(C - 5I_3) = 3 - 1 = 2$, *et la matrice C est diagonalisable.*

D. Oui. Le polynôme caractéristique de D est

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda + 6).$$

Les valeurs propres sont donc $0, -6, 6$. *Elles sont distinctes donc D est diagonalisable. Remarque : le théorème spectral du chapitre 7 stipulera que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.*

Exercice 11 (Meilleure approximation et distance)

Soient les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver la meilleure approximation de $\vec{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.

b) Calculer la distance entre $\vec{v}$ et $\mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Soient maintenant les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Trouver la meilleure approximation de $\vec{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.

d) Calculer la distance entre $\vec{v}$ et $\mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Sol.:

a) Soit $W = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. *La meilleure approximation* $\vec{w} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$ *de* $\vec{v}$ *correspond à la projection orthogonale* $\mathrm{proj}_W(\vec{v})$. **Attention**, *ici* $\vec{w}_1$ *et* $\vec{w}_2$ *ne sont pas orthogonaux* ($\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 \neq 0$).

Méthode 1 : *On applique la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la famille* $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. *On pose* $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. *La famille* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *forme alors une base orthogonale de W. On a ainsi*

$$\mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 : *La projection orthogonale est déterminée par* $\vec{w} \in W$ *et* $\vec{v} - \vec{w} \in W^\perp$ *:*

$$\begin{cases} (\vec{w} - \vec{v}) \cdot \vec{w}_1 = 0 \\ (\vec{w} - \vec{v}) \cdot \vec{w}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_1 = \vec{v} \cdot \vec{w}_1 \\ \alpha\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 + \beta\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{v} \cdot \vec{w}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases}.$$

La solution est $\alpha = -1/2$, $\beta = 4/3$. *Par conséquent,* $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{w}_1 + \frac{4}{3}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$.

b) $\|\vec{v} - \mathrm{proj}_W(\vec{v})\| = \left\| \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) *On pose à nouveau* $W = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. *On remarque que les vecteurs* $\vec{w}_1$ *et* $\vec{w}_2$ *sont orthogonaux. On peut ainsi facilement calculer la projection orthogonale.*

$$\mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

d) $\|\vec{v} - \mathrm{proj}_W(\vec{v})\| = \sqrt{\frac{35}{2}}$.

Exercice 12 (Matrices orthogonales)

a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale. (Que peut-on déduire sur les lignes de Q ?)

b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.

c) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.

d) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Sol.:

Rappelons qu'une matrice $U \in M_{n \times n}$ *est orthogonale si et seulement si* $U^T U = I_n$. *Dans ce cas* $U^{-1} = U^T$.

a) *Si* Q *est orthogonale alors* $Q^T Q = I_n$, *et dans ce cas* $Q^{-1} = Q^T$. *Pour conclure que* Q^T *est orthogonale, on doit vérifier* $(Q^T)^T Q^T = I_n$. *En effet,*

$$(Q^T)^T Q^T = QQ^T = QQ^{-1} = I_n.$$

Cela nous dit que les lignes d'une matrice orthogonale forme aussi une famille orthonormale.

b) *Nous devons vérifier que* $(UV)^T UV = I_n$. *En effet,*

$$(UV)^T UV = V^T U^T UV = V^T I_n V = I_n.$$

c) *La matrice orthogonale conserve la norme de tout vecteur* $\vec{x}$: $\|Q\vec{x}\|^2 = (Q\vec{x})^T (Q\vec{x}) = \vec{x}^T Q^T Q \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$. *Ensuite, si* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *est un vecteur propre associé à* λ, *on a* $\|\vec{x}\| = \|Q\vec{x}\| = \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$. *Comme* $\|\vec{x}\| \neq 0$, *on obtient* $|\lambda| = 1$, *ainsi* $\lambda = \pm 1$.

d) *On calcule pour tous i, j :*

$$Q\vec{w}_i \cdot Q\vec{w}_j = (Q\vec{w}_i)^T Q\vec{w}_j = \vec{w}_i^T Q^T Q\vec{w}_j = \vec{w}_i^T \vec{w}_j = \vec{w}_i \cdot \vec{w}_j.$$

Comme les $\vec{w}_i$ sont orthogonaux entre eux, ceci montre que la famille $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls (de normes $\|Q\vec{w}_i\| = \|\vec{w}_i\|$).
Il reste à montrer que $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est une base.
Méthode 1 : *Comme Q est inversible (d'inverse Q^T), Q transforme les bases en bases, donc $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est une base.*
Méthode 2 : *Comme la famille $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, elle est automatiquement linéairement indépendante. Comme elle comporte n vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^n$.*
Remarque : si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ est une base orthonormée, alors $\|Q\vec{u}_i\| = 1$, et $\{Q\vec{u}_1, ..., Q\vec{u}_n\}$ est aussi une base orthonormée.