Série de révision

Cette série contient des exercices de révision relatifs aux chapitres 1 à 7.

Exercice 1 (Applications linéaires)

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Preuve)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Montrer qu'une condition nécessaire pour que T soit bijective est $n = m$.

Exercice 3 (Solution générale)

Déterminer la solution générale (si elle existe) des systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $$\begin{cases} 2x + y + 4z - 2u = 1 \\ x + 3y - 2z + 2u = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \\ x - 2y + 6z - 4u = 7 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + u = -5 \\ x + 2y - u = 2 \\ y + z + u = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 (Système avec paramètres)

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour que le système associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right)$$

a) ne possède pas de solution,
b) possède une solution unique,
c) possède une infinité de solutions.

Exercice 5 (Applications linéaires)

Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires (justifier avec la définition) et donner la matrice associée lorsque cela est possible :

a) $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

b) $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x^2) \end{array}$

c) $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y\ ,\ 2x - 3y) \end{array}$

d) $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - z\ ,\ x + y) \end{array}$

e) $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, u) & \longmapsto & (2x + u\ ,\ y - z + 1) \end{array}$

Exercice 6 (Calcul matriciel)

a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T.

Exercice 7 (Application linéaire)

Soit h un nombre réel et D la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$. On définit une application $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ par $T(A) = D \cdot A$.

1. Déterminer si T est linéaire (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
2. Déterminer si T est surjective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
3. Déterminer si T est injective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

Indication. Traiter le cas où D est inversible pour résoudre une équation de type $D{\cdot}A = B$.

Exercice 8 (Déterminants)

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 9 (Forme échelonnée réduite et rang)

Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis calculer leur rang.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (Diagonalisation)

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (Meilleure approximation et distance)

Soient les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver la meilleure approximation de $\vec{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.
b) Calculer la distance entre $\vec{v}$ et $\text{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Soient maintenant les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Trouver la meilleure approximation de $\vec{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.
d) Calculer la distance entre $\vec{v}$ et $\text{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Exercice 12 (Matrices orthogonales)

a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale. (Que peut-on déduire sur les lignes de Q ?)
b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.
c) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.
d) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.