Exercice 3 – Corrigé

Sous-espaces vectoriels

Soient V et W deux espaces vectoriels. Soit $T : V \to W$ une application linéaire et soit Z un sous-espace vectoriel de W. Montrer que l'ensemble

$$Y = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) \in Z\}$$

est un sous-espace vectoriel de V.

Il est bon de décomposer la résolution de ce genre d'exercice à priori complexe en quatre parties. Dans un premier temps (*analyser*), il s'agit de bien appréhender le problème. Quelle est sa thématique? Ensuite (*lister*), on pose les outils mathématiques nécessaires à la résolution du problème, qui sera l'étape suivante (*résoudre*). Finalement, si cela est possible, on vérifie nos résultats (*vérifier*).

Analyser. Il s'agit de déterminer si l'ensemble Y est un sous-espace vectoriel de V.

Lister. Il faut penser à se rappeler la définition de sous-espace vectoriel.

Résoudre. Nous devons montrer :

$\boxed{\vec{0}_V \in Y}$

Comme $T : V \to W$ est une application linéaire, nous avons $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

Comme Z est un sous-espace vectoriel de W, le vecteur $\vec{0}_W \in W$ est contenu dans Z.

Par conséquent, $\vec{0}_V \in Y$ car $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \in Z$.

$\boxed{\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in Y \text{ pour tout choix de } \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Y}$

Si $\vec{y}_1$ et $\vec{y}_2$ sont deux éléments quelconques de Y, alors $\vec{z}_1 = T(\vec{y}_1)$ et $\vec{z}_2 = T(\vec{y}_2)$ sont des éléments de Z.

Comme $T : V \to W$ est une application linéaire, nous avons

$$T(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = T(\vec{y}_1) + T(\vec{y}_2) = \vec{z}_1 + \vec{z}_2\,.$$

Comme Z est un sous-espace vectoriel de W et $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in Z$, nous avons $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 \in Z$. Par conséquent, $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in Y$.

$\boxed{c\vec{y} \in Y \text{ pour tout choix de } \vec{y} \in Y \text{ et } c \in \mathbb{R}.}$

Si $\vec{y}$ est un élément quelconque de Y, alors $\vec{z} = T(\vec{y})$ est un élément de Z.

Comme $T : V \to W$ est une application linéaire, nous avons

$$T(c\vec{y}) = cT(\vec{y}) = c\vec{z} \qquad \text{pour tout } c \in \mathbb{R}.$$

Comme Z est un sous-espace vectoriel de W et $\vec{z} \in Z$, nous avons $c\vec{z} \in Z$. Par conséquent, $c\vec{y} \in Y$.