Exercice 4 – Corrigé

Diagonalisation

Soit A une matrice de taille 3×3 telle que

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

sont des vecteurs propres de la matrice A associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$ respectivement.

Déterminer A.

Il est bon de décomposer la résolution de ce genre d'exercice à priori complexe en quatre parties. Dans un premier temps (*analyser*), il s'agit de bien appréhender le problème. Quelle est sa thématique? Ensuite (*lister*), on pose les outils mathématiques nécessaires à la résolution du problème, qui sera l'étape suivante (*résoudre*). Finalement, si cela est possible, on vérifie nos résultats (*vérifier*).

Analyser. Il s'agit de déterminer la matrice A si l'on connaît ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.

Lister. Il faut penser à se rappeler la définition de diagonalisation.

Résoudre. Comme A est une matrice de taille 3×3 et qu'elle dispose de trois valeurs propres de multiplicité 1, elle est diagonalisable. Elle peut donc s'écrire sous la forme

$$A = PDP^{-1}$$

où

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_2 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Le calcul de la matrice inverse

$$\begin{bmatrix} P \mid I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I \mid P^{-1} \end{bmatrix}$$

nous donne

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

et

$$A = (PD)P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$