## Deuxième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 10 :** *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8 *Réservé au correcteur*

Soient $A$ et $B$ les deux matrices 4×4 données ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**(a)** Seule une des deux matrices est diagonalisable en base orthonormée. Laquelle et pourquoi? *(1 point)*

**(b)** Donner une diagonalisation en base orthonormée sous la forme $PDP^{-1}$ de la matrice du point (a). *(7 points)*

Correction

Correction

Correction

**Question 11 :** *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 *Réservé au correcteur*

Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

**(a)** Donner la définition d'une base orthonormée de $W$. *(2 points)*

**(b)** Soient $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ une base orthonormée de $W$ et $U = (\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p)$. *(5 points)*

- **(i)** Prouver que $\mathrm{proj}_W(\vec{v}) = UU^T\vec{v}$, pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
- **(ii)** Est-ce que $UU^T = U^TU$? Justifier en détails.

**(c)** Soient $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par *(3 points)*

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $W = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Calculer la distance de $\vec{w}$ à $W$.

Correction

## Deuxième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 13 :** *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7 *Réservé au correcteur*

**(a)** Soit $\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. *(2 points)*

**( i )** Donner la définition de l'application coordonnée $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$. *(1 point)*

**(ii)** Est-ce que l'application coordonnée $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ est linéaire? Justifier votre réponse en détail. *(1 point)*

**(b)** Démontrer le théorème ci-dessous. *(5 points)*

*Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalisable avec une matrice $P$ inversible et $D$ diagonale. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée des colonnes de la matrice $P$, alors la matrice $D$ est la matrice de l'application linéaire $T$ dans la base $\mathcal{B}$, où $T$ est définie par*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\mapsto A\vec{x}. \end{aligned}$$

Correction

Correction

**Question 14 :** *Cette question est notée sur 9 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ■ 9 *Réservé au correcteur*

Soient $W = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$, où

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Donner la définition de la factorisation $QR$ (appelée aussi *théorème de la factorisation $QR$*) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. *(2 points)*

**(b)** Calculer $\text{proj}_W(\vec{b})$ en utilisant la factorisation $QR$. Donner explicitement les matrices $Q$ et $R$ utilisées. *(7 points)*

Correction