

Deuxième partie, questions de type ouvert

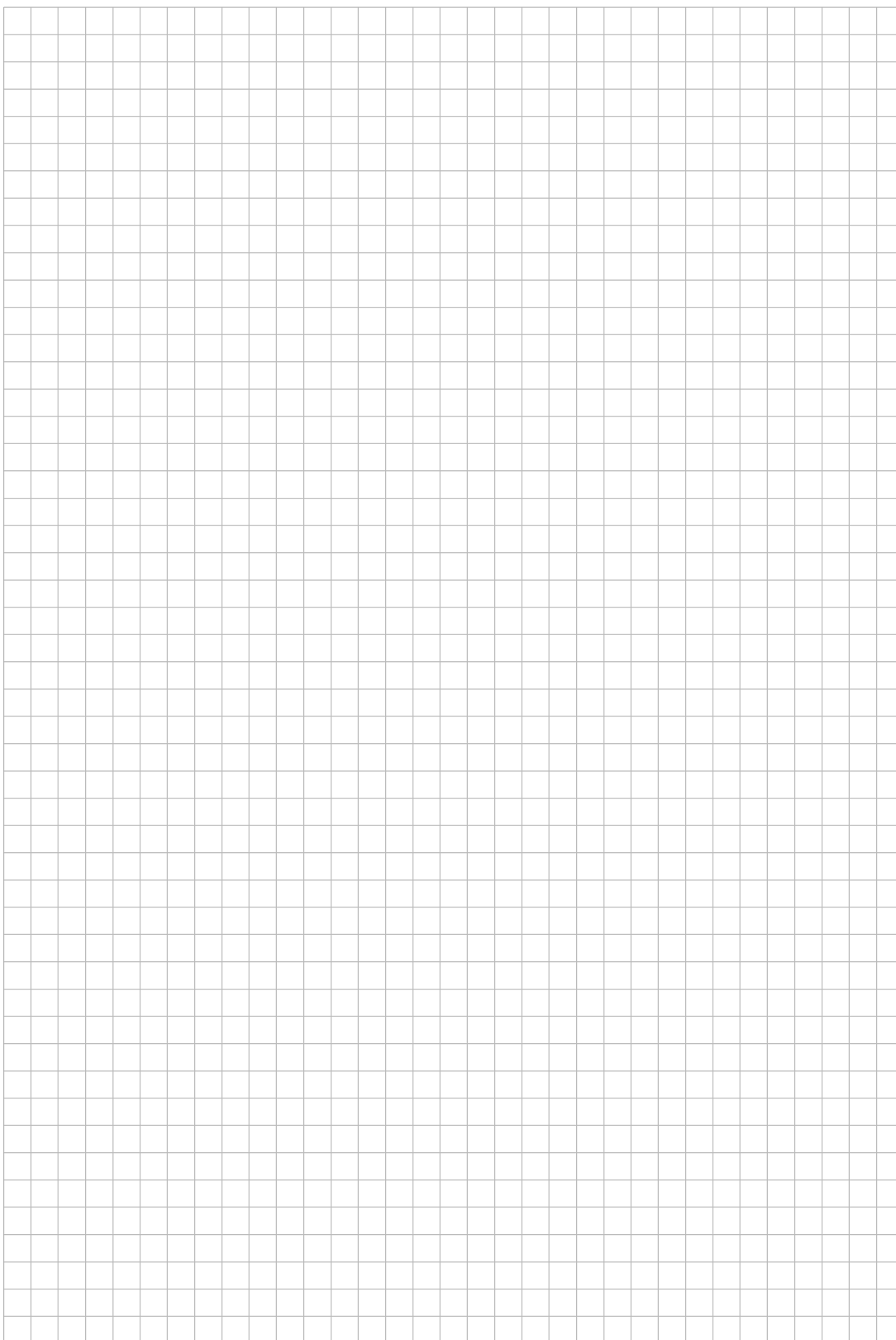
- Question 10 :** *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0
 ☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3
 ☐ 4
 ☐ 5
 ☐ 6
 ☐ 7
 ☒ 8
 Réservé au correcteur

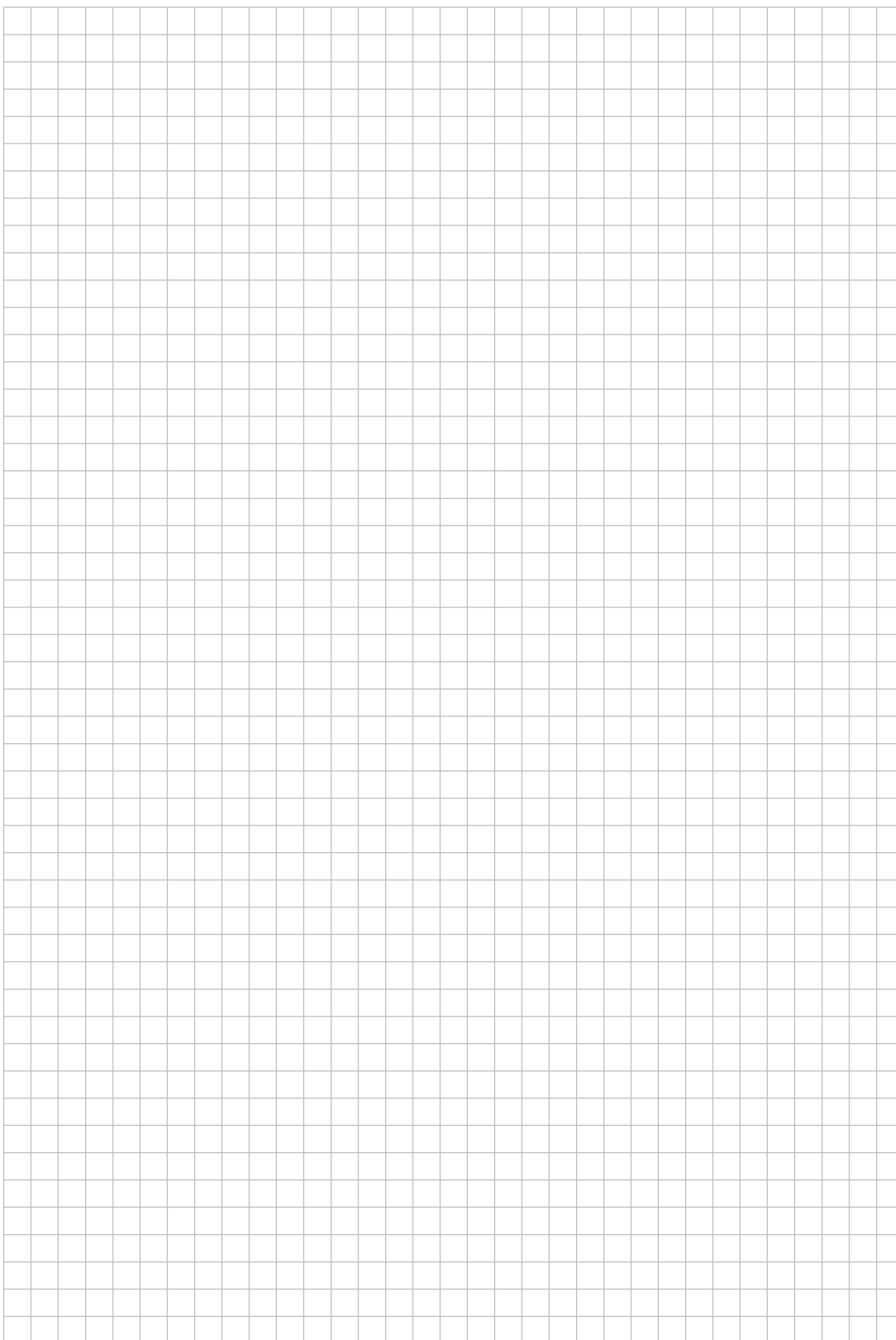
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Seule une des deux matrices est diagonalisable en base orthonormée. (1 point)
Laquelle et pourquoi?
- (b) Donner une diagonalisation en base orthonormée sous la forme PDP^{-1} de la matrice du point (a). (7 points)

CORRECTION



CORRECTION



CORRECTION

Question 11 : Cette question est notée sur 10 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☒ 10

Réservé au correcteur

Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

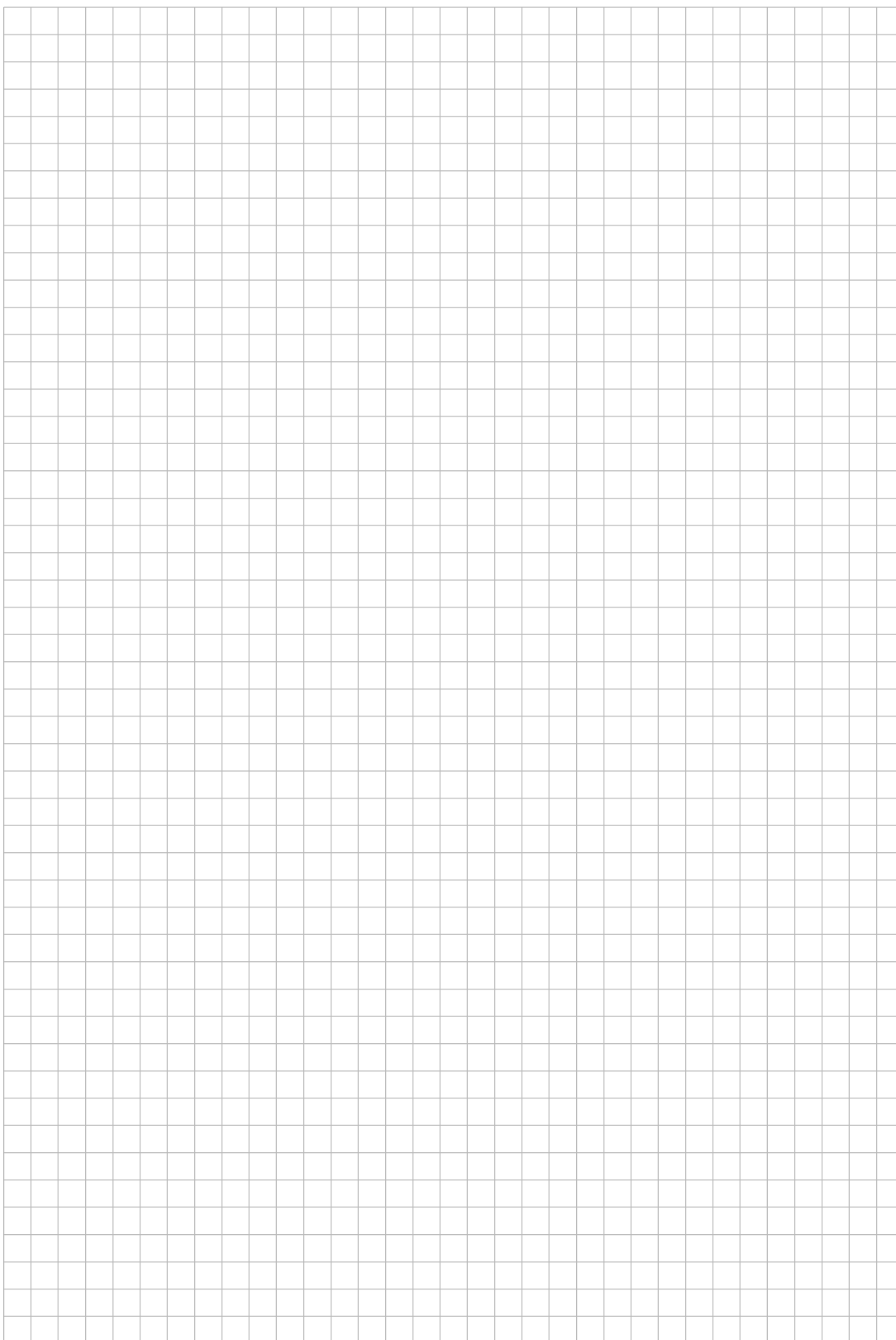
- (a) Donner la définition d'une base orthonormée de W . (2 points)
- (b) Soient $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ une base orthonormée de W et $U = (\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_p)$. (5 points)
 - (i) Prouver que $\text{proj}_W(\vec{v}) = UU^T\vec{v}$, pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
 - (ii) Est-ce que $UU^T = U^TU$? Justifier en détails.
- (c) Soient $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 donnés par (3 points)

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $W = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Calculer la distance de \vec{w} à W .



CORRECTION



Deuxième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

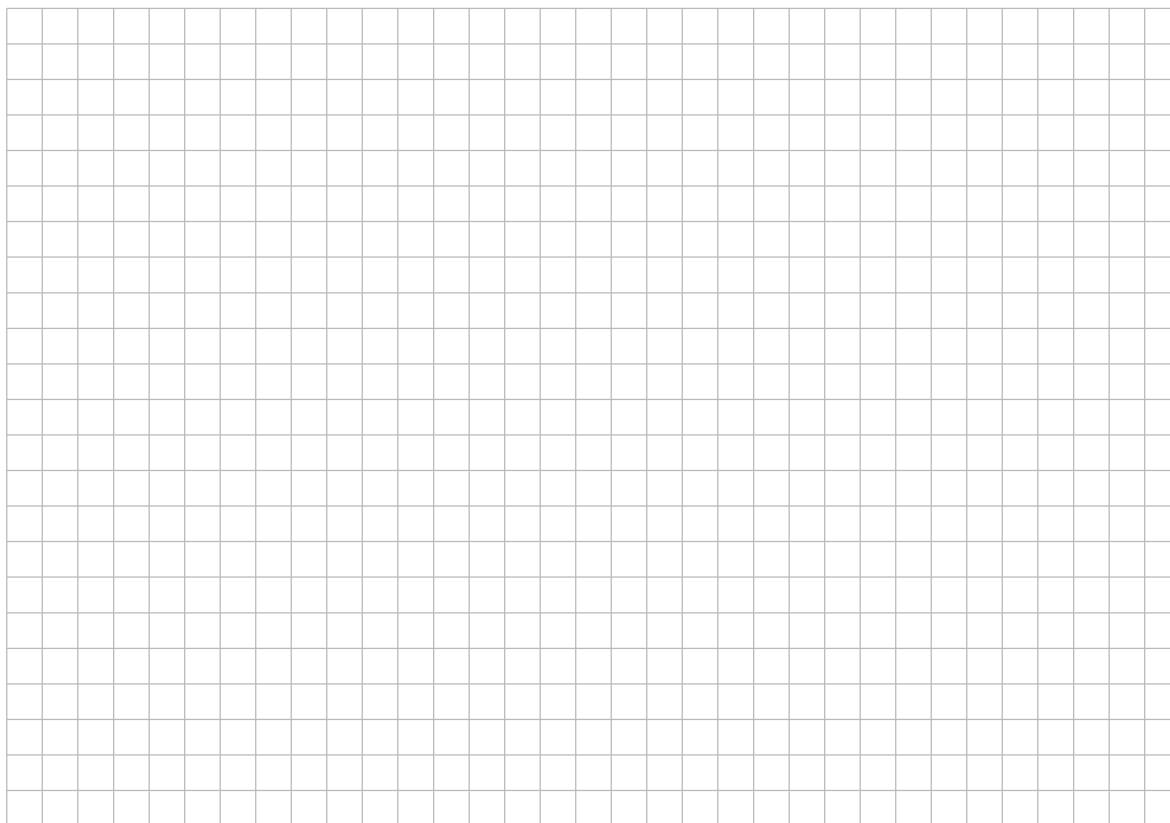
Question 13 : Cette question est notée sur 7 points.

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input checked="" type="checkbox"/>	7	Réservé au correcteur
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	-------------------------------------	---	-----------------------

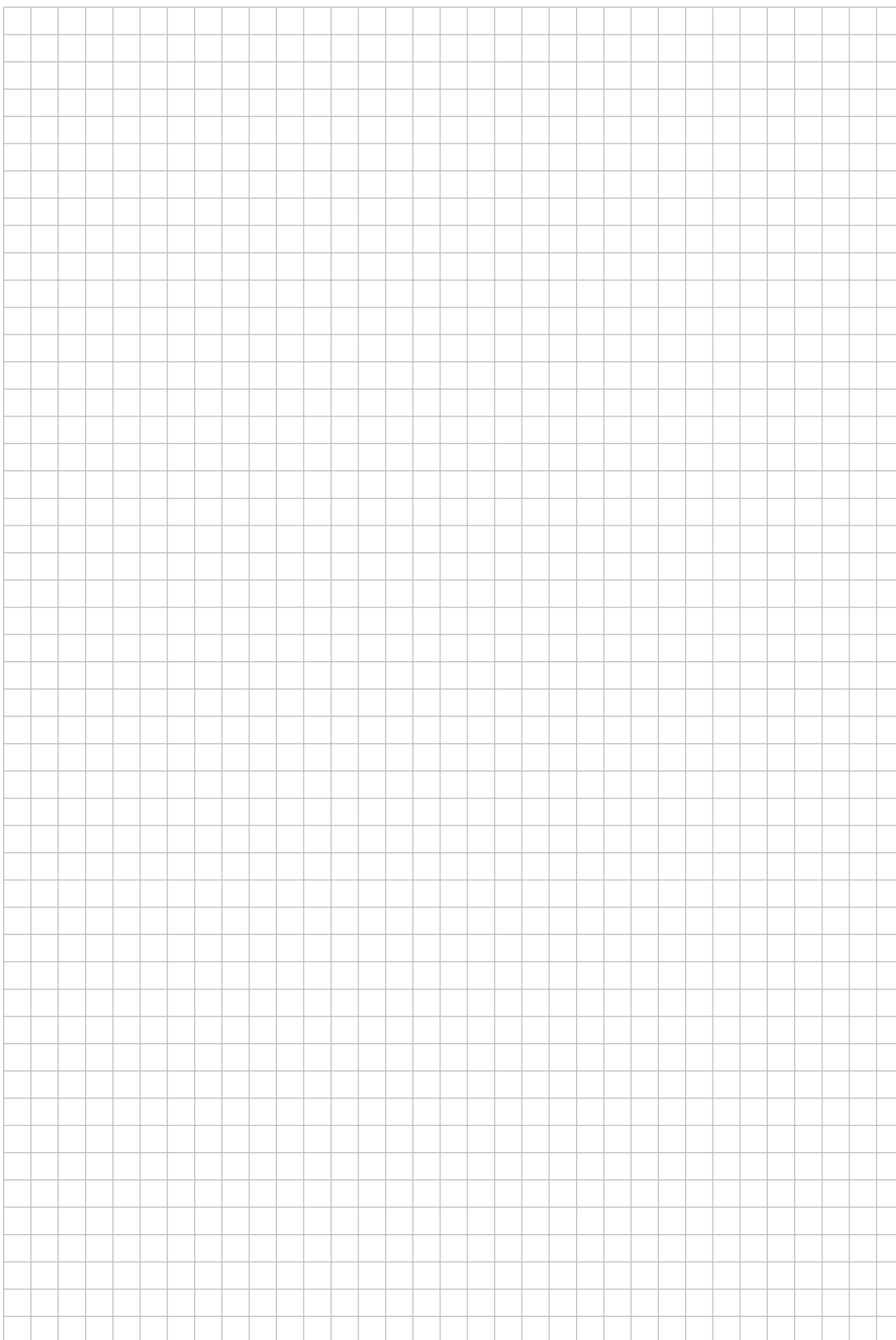
- (a) Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ une base de \mathbb{R}^n . (2 points)
- (i) Donner la définition de l'application coordonnée $[\cdot]_{\mathcal{B}}$. (1 point)
- (ii) Est-ce que l'application coordonnée $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est linéaire? Justifier (1 point)
votre réponse en détail.
- (b) Démontrer le théorème ci-dessous. (5 points)
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonalisable avec une matrice P inversible et D diagonale.
Si \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n formée des colonnes de la matrice P , alors la matrice
 D est la matrice de l'application linéaire T dans la base \mathcal{B} , où T est définie par*

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

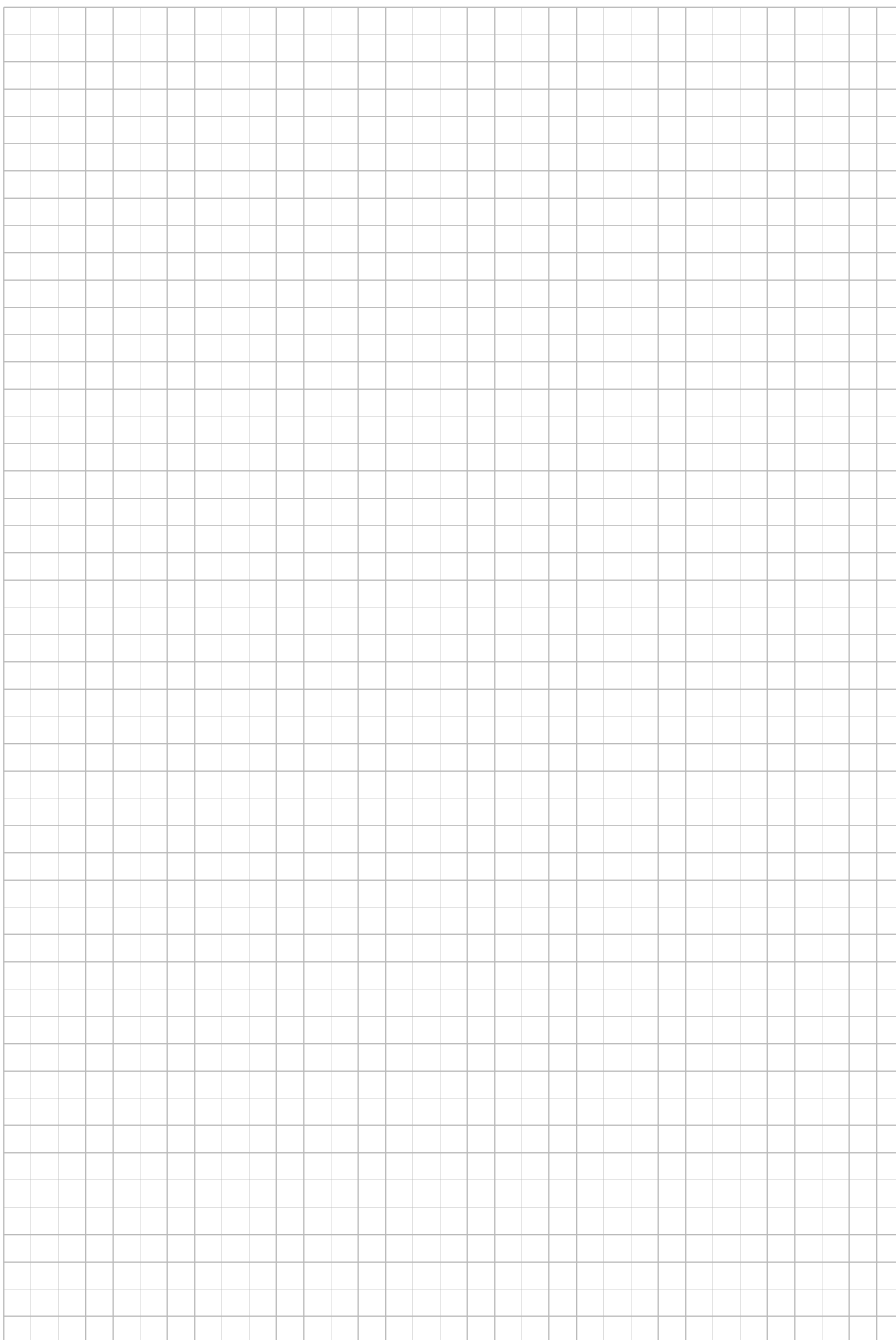
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}.$$



CORRECTION



CORRECTION



Question 14 : Cette question est notée sur 9 points.

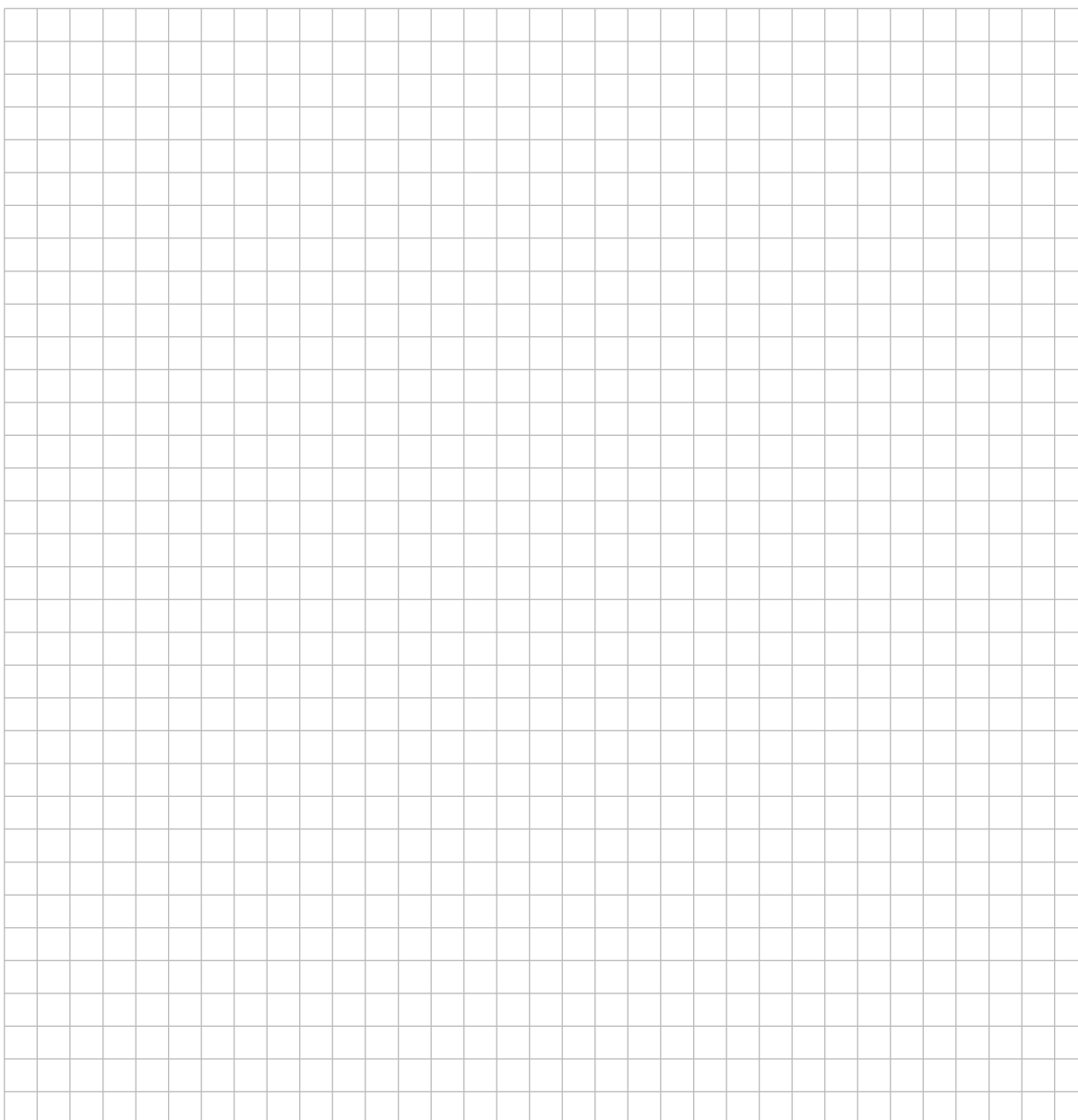
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☒ 9

Réservé au correcteur

Soient $W = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$, où

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Donner la définition de la factorisation QR (appelée aussi *théorème de la factorisation QR*) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. (2 points)
- (b) Calculer $\text{proj}_W(\vec{b})$ en utilisant la factorisation QR . Donner explicitement les matrices Q et R utilisées. (7 points)



CORRECTION

