Durée : 144 minutes

# Algèbre linéaire
# Examen
## Partie commune
## Automne 2023

---

## Réponses

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
$0$ point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
$-1$ point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
$0$ point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
$-1$ point si la réponse est incorrecte.

## Notation

– Pour une matrice $A$, $a_{ij}$ désigne l'élément situé sur la ligne $i$ et la colonne $j$ de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $x_i$ désigne la $i$-ème composante de $\vec{x}$.
– $I_m$ désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n$.
– $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m\times n$ à coefficients réels.
– Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.
– Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est définie par $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1 :** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

possède une décomposition QR telle que

☐ $r_{12} = 0$ ☐ $r_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ■ $r_{12} = \sqrt{2}$ ☐ $r_{12} = 1$

**Question 2 :** Soient

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = P_{\mathcal{CB}}$ la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la deuxième ligne de $P$ est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

**Question 3 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ $\det(A) = 12\pi$ ■ $\det(A) = -6\pi$ ☐ $\det(A) = 0$ ☐ $\det(A) = \sqrt{6}\pi$

**Question 4 :** La droite de régression linéaire pour les points $(-3, -7), (-2, -3), (0, 3), (3, 7)$ satisfait l'équation

■ $y = \frac{8}{7} + \frac{16}{7}x$ ☐ $y = -\frac{8}{7} + \frac{16}{7}x$ ☐ $y = \frac{16}{7} + \frac{8}{7}x$ ☐ $y = -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}x$

**Question 5 :** Soit $\mathcal{B} = \left(2 - t,\ t + t^2,\ -1 + t^3,\ -1 - t + 2t^2\right)$ une base de $\mathbb{P}_3$. La quatrième coordonnée du polynôme $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est égale à

☐ $3$ ■ $-\frac{1}{7}$ ☐ $-7$ ☐ $\frac{1}{7}$

**Question 6 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A$ sont

■ $-3$ et $2$ □ $-2$ et $3$ □ $-1$ et $2$ □ $-1$ et $1$

**Question 7 :** Soient

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{b}$ est la projection orthogonale de $\vec{y}$ sur $W = \operatorname{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, alors

□ $b_3 = \frac{5}{4}$ □ $b_3 = 20$ ■ $b_3 = \frac{7}{8}$ □ $b_3 = 14$

**Question 8 :** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si $\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ est une solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés, alors l'erreur de l'approximation de $\vec{b}$ par $A\widehat{x}$ est

□ $\|\vec{b} - A\widehat{x}\| = \sqrt{2}$ □ $\|\vec{b} - A\widehat{x}\| = 6$ □ $\|\vec{b} - A\widehat{x}\| = 0$ ■ $\|\vec{b} - A\widehat{x}\| = \sqrt{6}$

**Question 9 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

□ $x_1 = 3$ □ $x_1 = 2$ □ $x_1 = -2$ ■ $x_1 = -3$

**Question 10 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice $A$ est tel que

■ $b_{33} = \frac{4}{39}$ □ $b_{41} = \frac{1}{3}$ □ $b_{43} = \frac{2}{3}$ □ $b_{33} = -\frac{1}{13}$

**Question 11 :** Soit $W$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille $2\times2$ et soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to W$ l'application linéaire définie par

$$T(a+bt+ct^2) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ b-c & a+b+c \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \big(1,\, 1-t,\, t+t^2\big) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

des bases de $\mathbb{P}_2$ et $W$ respectivement. La matrice $A$ associée à $T$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ et la base $\mathcal{C}$ de $W$, telle que $\big[T(p)\big]_{\mathcal{C}} = A\big[p\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Question 12 :** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ est inversible mais pas diagonalisable

☐ est inversible et diagonalisable

☐ n'est ni inversible ni diagonalisable

☐ est diagonalisable mais pas inversible

**Question 13 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

■ toutes les valeurs propres de $A$ ont la même multiplicité géométrique

☐ $\lambda = 4$ est une valeur propre de $A$ avec multiplicité algébrique 2

☐ toutes les valeurs propres de $A$ ont la même multiplicité algébrique

☐ $\lambda = 2$ est une valeur propre de $A$ avec multiplicité géométrique 2

**Question 14 :** Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \\ -5x+6y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Alors

■ $T$ est injective mais pas surjective

☐ $T$ est injective et surjective

☐ $T$ n'est ni injective ni surjective

☐ $T$ est surjective mais pas injective

**Question 15 :** L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

sans changer l'ordre des colonnes fournit une base orthogonale de $\mathrm{Im}(A)$ donnée par les vecteurs

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 16 :** Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Si $\vec{u} \in W$, alors le produit scalaire canonique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit scalaire canonique entre $\vec{u}$ et la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $W$.

■ VRAI □ FAUX

**Question 17 :** Soit $T\colon \mathbb{P}_6 \to \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ une application linéaire. Alors il existe $p, q \in \mathbb{P}_6$ tels que $p \neq q$ et $T(p) = T(q)$.

■ VRAI □ FAUX

**Question 18 :** Soit $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$ une base de $\mathbb{R}^m$. Si $A$ est une matrice de taille $m\times n$ telle que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}_k$ possède au moins une solution pour tout $k = 1, \ldots, m$, alors $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^m$.

■ VRAI □ FAUX

**Question 19 :** Si $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ sont $k$ vecteurs orthonormés de $\mathbb{R}^n$, alors le complément orthogonal de $\operatorname{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$.

■ VRAI □ FAUX

**Question 20 :** Si $A$ et $B$ sont deux matrices inversibles de taille $n\times n$ telles que $A + B$ n'est pas la matrice nulle, alors $A + B$ est aussi inversible.

□ VRAI ■ FAUX

**Question 21 :** Soit $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, alors $A\vec{u}$, $A\vec{v}$, $A\vec{w}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

□ VRAI ■ FAUX

**Question 22 :** Soit $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec valeurs propres 2, 3, $-5$. Alors

$$\det(A^3) = -27000.$$

■ VRAI □ FAUX

**Question 23 :** Soient $V$ et $W$ deux espaces vectoriels et soit $T\colon V \to W$ une application linéaire.
Si $\dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(V)$, alors $\operatorname{Im}(T) = \{\vec{0}_W\}$.

■ VRAI □ FAUX

**Question 24 :** Soit $A$ une matrice de taille $m\times n$ avec $m < n$. Si la forme échelonnée réduite de $A$ possède exactement $k$ lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$.

□ VRAI ■ FAUX

**Question 25 :** Soit $A$ une matrice de taille $n \times n$ et soit $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $A$ est telle que $A^5 = 0$, alors $T$ est surjective.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 26 :** Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors

$$\det(A - A^\top) = \det(A) - \det(A^\top).$$

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 27 :** Soit $q$ un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3 \mid q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_3$.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 28 :** Soit $W$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_5$ engendré par $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5$. Si $\dim(W) = 4$, alors il existe deux polynômes $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5$ tels que la famille $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ est une base de $\mathbb{P}_5$.

■ VRAI ☐ FAUX

## Troisième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 29 :** *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ■3 *Réservé au correcteur*

Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs linéairement indépendants.

Soit $A$ une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de $A$ associés aux valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivement.

Soit $B$ une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de $B$ associés aux valeurs propres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivement.

Montrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable et satisfait

$$\det(A - B) = (\alpha_1 - \beta_1) \cdots (\alpha_n - \beta_n)\,.$$

**Question 30 :** *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3 *Réservé au correcteur*

Soit $A$ une matrice symétrique de taille 3×3 dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 4\,.$$

Soit $c$ un nombre réel et soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des vecteurs propres de la matrice $A$ associés aux valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ respectivement.

Déterminer la valeur de $c$ et construire la matrice $A$.