Série 9

Cette série suit le chapitre 4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *bases, systèmes de coordonnées, applications linéaires*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Base de ker)

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de Ker$C$.
2. On note par T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(\overrightarrow{x}) = C\overrightarrow{x}$. L'application T est-elle injective ? T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (Changement de bases)

Soient $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$ avec

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Donner la matrice $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ de changement de base (matrice de passage) de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.

b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

c) Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_{\mathcal{C}}$.

d) À présent, si $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$.

Exercice 3 (Image et noyau)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication :** quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices ?)

b) Calculer le rang de A et $\dim\mathrm{Ker}A$.

c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathrm{Im}A$, $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^T$, ainsi que du sous-espace $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Exercice 4 (Applications linéaires)

1. Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques E de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

   b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(C) = X \cdot C$, où X est la matrice de taille 2×2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

   On cherche $B = \Big([T(B_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_4)]_{\mathcal{B}}\Big)$.

Exercice 5 (Preuve)

Prouver le théorème suivant. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V. Alors toute famille d'éléments de V de plus de n éléments est une famille linéairement dépendante.*

Exercice 6 (Rang)

a) Soit A une matrice 5×6. Si $\dim \operatorname{Ker} A = 3$, quel est le rang de A ?
b) Soit A une matrice 7×3. Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\operatorname{Ker} A$? Même question si A est une matrice 3×7.
c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\operatorname{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.
d) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = I_3$ (l'application identité). Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} T$?

Exercice 7 (Changements de bases)

Soit $\vec{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Exercice 8 (Rang)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Donner une base pour le noyau, l'image, et l'espace engendré par les lignes de A, puis vérifier que l'affirmation du théorème du rang est bien vérifiée.

Exercice 9 (Application linéaire)

On considère l'application linéaire $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

a) Trouver la matrice $[T]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ de l'application T relativement à la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{P}_3$ (départ) et $\mathcal{E}$ de $\mathbb{P}_2$ (arrivée).
b) Trouver la dimension et une base de ImT.
c) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).
d) Trouver la dimension et une base de Ker$T$.
e) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).
f) L'application T est-elle injective, surjective, ou bijective ?

Exercice 10 (Changements de bases)

Soient $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ deux bases d'un espace vectoriel V. Supposons que

$$b_1 = 6c_1 - 2c_2 \quad \text{et} \quad b_2 = 9c_1 - 4c_2.$$

(a) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.
(b) Trouver $[x]_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a)

Soient $\mathcal{A} = (\vec{a_1}, \vec{a_2})$ et $\mathcal{D} = (\vec{d_1}, \vec{d_2})$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{a_1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{d_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{d_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{A}}$ de la base $\mathcal{A}$ vers la base $\mathcal{D}$.
(d) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{D}}$ de la base $\mathcal{D}$ vers la base $\mathcal{A}$.

Exercice 11 (QCM)

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0.
☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.
☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.
☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

b) On considère les polynômes $p(t) = (1-t)(1+t) = 1 - t^2$ et $q(t) = (1+t)(1+t) = 1 + 2t + t^2$ de $\mathbb{P}_2$.

☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.
☐ Les polynômes p et q forment une base de $\mathbb{P}_2$.
☐ Le polynôme $q - p$ est le polynôme nul.
☐ $(1+t)p - (1-t)q$ est une combinaison linéaire de p et q.

c) Soit W l'hyperplan dans $\mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.
☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

d) Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.
☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geqslant k$.
☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V = k$.
☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V \geqslant k$.

e) Soit $\mathrm{Tr}\colon M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie par

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d.$$

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2\times 2}$ de dimension 1.
☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2\times 2}$ de dimension 2.
☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2\times 2}$ de dimension 3.
☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $M_{2\times 2}$ de dimension 4.

f) Soit $\mathrm{Tr}\colon M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de Tr :

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 12 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Le plan défini dans $\mathbb{R}^3$ par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. ☐ ☐

b) $\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$ si et seulement si l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective. ☐ ☐

c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$. ☐ ☐

d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ☐ ☐